# XI OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA PARA ESTUDANTES UNIVERSITÁRIOS

23 a 29 de julho, Skopje - Macedônia

## PRIMEIRO DIA

**PROBLEMA 1**

Seja $S$ um conjunto infinito de números reais tal que $|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq 1$ para todo subconjunto finito $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset S$. Demonstre que $S$ é enumerável.

**PROBLEMA 2**

Seja $f_1(x) = x^2 - 1$, e para cada inteiro positivo $n \geq 2$ defina $f_n(x) = f_{n-1}(f_1(x))$. Quantas raízes reais distintas tem o polinômio $f_{2004}$ ?

**PROBLEMA 3**

Seja $A_n$ o conjunto de todas as somas $\sum_{k=1}^{n} \arcsin x_k$, onde $n \geq 2$, $x_k \in [0,1]$, e $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.

i) Prove que $A_n$ é um intervalo.

ii) Seja $a_n$ o comprimento do intervalo $A_n$. Calcule $\lim_{n \to \infty} a_n$.

**PROBLEMA 4**

Suponha $n \geq 4$ e seja $S$ um conjunto finito de pontos no espaço $\mathbb{R}^3$, de maneira que quaisquer quatro de seus pontos não sejam coplanares. Suponha que todos os pontos de $S$ podem ser coloridos de vermelho e azul de modo que qualquer esfera que intersecte $S$ em ao menos 4 pontos tenha a propriedade de que exatamente a metade dos pontos na interseção de $S$ com a esfera é azul. Prove que todos os pontos de $S$ encontram-se numa esfera.

**PROBLEMA 5**

Seja $S$ um conjunto de $\binom{2n}{n}$ + 1 números reais, onde $n$ é um inteiro positivo. Prove que onde existe uma seqüência monótona $\{a_i\}_{1 \leq i \leq n+2} \subset S$ tal que

$$|x_{i+1} - x_1| \geq 2|x_i - x_1|,$$

para todo $i$ = 2, 3,…, $n$.

**PROBLEMA 6**

Para cada número complexo *z* diferente de 0 e 1 definimos a seguinte função:

$$f(z) = \sum \frac{1}{\log^4 z}$$

onde a soma é sobre todos os ramos do logaritmo complexo.

i) Prove que há dois polinômios *P* e *Q* tais que $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C} - \{0,1\}$.

ii) Prove que para todo $z \in \mathbb{C} - \{0,1\}$ temos

$$f(z) = \frac{z^3 + 4z^2 + z}{6(z-1)^4}.$$

## SEGUNDO DIA

**PROBLEMA 7**

Seja *A* uma matriz real $4 \times 2$ e *B* uma matriz real $2 \times 4$ tal que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encontre *BA*.

**PROBLEMA 8**

Sejam $f, g : [a,b] \to [0,\infty)$ duas funções continuas não decrescentes tais que para cada $x \in [a,b]$ temos

$$\int_a^x \sqrt{f(t)}\ dt \le \int_a^x \sqrt{g(t)}\ dt \quad \text{e} \quad \int_a^b \sqrt{f(t)}\ dt = \int_a^b \sqrt{g(t)}\ dt.$$

Prove que

$$\int_a^b \sqrt{1+f(t)}\ dt \ge \int_a^b \sqrt{1+g(t)}\ dt.$$

**PROBLEMA 9**

Seja *D* um disco unitário fechado, e sejam $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pontos fixados em *D*. Prove que existe um ponto *z* em *D* tal que a soma das distancias desde *z* a cada um dos *n* pontos é maior ou igual que *n*.

**PROBLEMA 10**

Para $n \geq 1$ seja $M$ uma matriz complexa $n \times n$ com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, distintos com respectivas multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Considere o operador linear $L_M$ definido por $L_M X = MX + XM^T$, para qualquer $X$ matriz complexa $n \times n$. Encontre os autovalores de $L_M$ e suas multiplicidades.

**PROBLEMA 11**

Prove que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx \ dy}{\frac{1}{x} + |\log y| - 1} \leq 1.$$

**PROBLEMA 12**

Para $n \geq 0$ defina as matrizes $A_n$ e $B_n$ como segue: $A_0 = B_0 = (1)$, e, para cada $n > 0$,

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_{n-1} & B_{n-1} \end{pmatrix} \text{ e } B_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Denote por $S(M)$ a soma de todos os elementos da matriz $M$. Prove que $S\left(A_n^{k-1}\right) = S\left(A_k^{n-1}\right)$, para quaisquer $n, k \geq 2$.