Terça-feira, 10 de julho de 2012

Problema 1. Dado um triângulo ABC, o ponto J é o centro da circunferência ex-inscrita oposta ao vértice A. Esta circunferência ex-inscrita é tangente ao lado BC em M, e às retas AB e AC em K e L, respectivamente. As retas LM e BJ intersectam-se em F, e as retas KM e CJ intersectam-se em G. Seja S o ponto de interseção das retas AF e BC, e seja T o ponto de interseção das retas AG e BC.

Prove que M é o ponto médio de ST.

(A *circunferência ex-inscrita* de ABC oposta ao vértice A é a circunferência tangente ao segmento BC, ao prolongamento do segmento AB no sentido de A para B e ao prolongamento do segmento AC no sentido de A para C.)

Problema 2. Seja $n \geq 3$ um inteiro e sejam $a_2, a_3, \ldots, a_n$ números reais positivos tais que $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Prove que

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n \ > \ n^n.$$

Problema 3. O *desafio do mentiroso* é um jogo para dois jogadores A e B. As regras do jogo dependem de dois inteiros positivos k e n conhecidos por ambos os jogadores.

No início do jogo, o jogador A escolhe inteiros x e N com $1 \leq x \leq N$. O jogador A mantém x em segredo, e diz a B o verdadeiro valor de N. Em seguida, o jogador B tenta obter informação acerca de x fazendo perguntas a A da seguinte maneira: em cada pergunta, B especifica um conjunto arbitrário S de inteiros positivos (que pode ser um dos especificados nalguma pergunta anterior), e pergunta a A se x pertence a S. O jogador B pode fazer tantas perguntas desse tipo como deseje. Depois de cada pergunta, o jogador A deve responder imediatamente com *sim* ou *não*, mas pode mentir tantas vezes como queira. A única restrição é que dadas quaisquer $k+1$ respostas consecutivas, pelo menos uma deve ser verdadeira.

Quando B tenha feito tantas perguntas como pretenda, deve especificar um conjunto X com no máximo n inteiros positivos. Se x pertencer a X então ganha B; caso contrário, B perde. Prove que:

1. Se $n \geq 2^k$, então B pode garantir a sua vitória.
2. Para todo k suficientemente grande, existe um inteiro $n \geq 1{,}99^k$ tal que B não pode garantir a sua vitória.

Quarta-feira, 11 de julho de 2012

Problema 4. Determine todas as funções $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que, para todos os inteiros a, b, c que satisfazem $a+b+c=0$, a seguinte igualdade é verdadeira:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

($\mathbb{Z}$ designa o conjunto dos números inteiros.)

Problema 5. Seja ABC um triângulo tal que $\angle BCA = 90°$, e seja D o pé da altura relativa a C. Seja X um ponto no interior do segmento CD. Seja K o ponto do segmento AX tal que $BK = BC$. Analogamente, seja L o ponto do segmento BX tal que $AL = AC$. Seja M o ponto de interseção de AL com BK.

Prove que $MK = ML$.

Problema 6. Determine todos os inteiros positivos n para os quais existem inteiros não negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos