Terça-feira, 23 de julho de 2013

Problema 1. Demonstrar que, para qualquer par de inteiros positivos k e n, existem k inteiros positivos $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (não necessariamente distintos) tais que:

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Problema 2. Uma configuração de 4027 pontos do plano dos quais 2013 são vermelhos e 2014 azuis, e não há três pontos colineares, diz-se *colombiana*. Traçando algumas retas, o plano fica dividido em várias regiões. Um conjunto de retas é *bom* para uma configuração colombiana se satisfaz as duas seguintes condições:

- nenhuma reta passa por algum ponto da configuração;
- nenhuma região contém pontos de ambas as cores.

Encontrar o menor valor de k tal que, para qualquer configuração colombiana de 4027 pontos, há um conjunto bom de k retas.

Problema 3. Seja A_1 o ponto de tangência do excírculo do triângulo ABC oposto ao vértice A com o lado BC. Definem-se os pontos B_1 em CA e C_1 em AB, de modo análogo, utilizando os excírculos opostos a B e a C, respectivamente. Suponha que o circuncentro do triângulo $A_1B_1C_1$ pertence à circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Demonstrar que o triângulo ABC é retângulo.

O excírculo *de ABC oposto ao vértice A é a circunferência que é tangente ao segmento BC, ao prolongamento do lado AB no sentido de A para B e ao prolongamento do lado AC no sentido de A para C. Os excírculos opostos a B e a C definem-se de modo semelhante.*

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Quarta-feira, 24 de julho de 2013

Problema 4. Seja ABC um triângulo acutângulo com ortocentro H e seja W um ponto do lado BC, estritamente entre B e C. Os pontos M e N são os pés das alturas traçadas desde B e C, respectivamente. Designa-se por ω_1 a circunferência circunscrita ao triângulo BWN; seja X o ponto de ω_1 tal que WX é um diâmetro de ω_1. Analogamente, designa-se por ω_2 a circunferência circunscrita ao triângulo CWM; seja Y o ponto de ω_2 tal que WY é um diâmetro de ω_2. Demonstrar que os pontos X, Y e H são colineares.

Problema 5. Seja $\mathbb{Q}_{>0}$ o conjunto dos números racionais maiores do que zero. Seja $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz as três seguintes condições:

(i) $f(x)f(y) \geq f(xy)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;

(ii) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;

(iii) existe um número racional $a > 1$ tal que $f(a) = a$.

Demonstrar que $f(x) = x$ para qualquer $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Problema 6. Seja $n \geq 3$ um número inteiro. Considera-se uma circunferência na qual estão marcados $n+1$ pontos igualmente espaçados. A cada ponto atribui-se um dos números $0, 1, \ldots, n$ de modo que cada número é usado exatamente uma vez; duas atribuições de números consideram-se a mesma se uma pode ser obtida da outra por uma rotação da circunferência. Uma atribuição de números chama-se *bonita* se, para quaisquer quatro números $a < b < c < d$ com $a + d = b + c$, a corda que une os pontos correspondentes a a e a d não interseta a corda que une os pontos correspondentes a b e a c.

Sejam M o número de atribuições bonitas e N o número de pares ordenados (x, y) de inteiros positivos tais que $x + y \leq n$ e $\mathrm{mdc}(x, y) = 1$. Demonstrar que

$$M = N + 1.$$

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos