DURAÇÃO: **4**h **30**m
CADA QUESTÃO: 7 PONTOS

1º dia

1. No triângulo ABC, L e K são os pontos de interseção das bissetrizes dos ângulos ABC e CAB com os lados AC e BC, respetivamente. Sabendo que KL é, também, bissetriz do ângulo AKC, determine o ângulo BAC.

2. Determine todos os números de dez algarismos cuja representação no sistema decimal é dada por $\overline{a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$ tais que, para cada inteiro j com $0 \leq j \leq 9$, a_j é igual ao número de algarismos iguais a j nessa representação. Isto é: o primeiro algarismo é igual à quantidade de "0" na escrita desse número; o segundo algarismo é igual à quantidade de "1" na escrita desse número; o terceiro algarismo é igual à quantidade de "2" na escrita desse número; …. ; o décimo algarismo é igual à quantidade de "9" na escrita desse número.

3. No centro de um quadrado encontra-se um coelho e em cada vértice desse mesmo quadrado, um lobo. Os lobos deslocam-se apenas ao longo dos lados do quadrado e o coelho desloca-se livremente no plano. Sabendo que o coelho se desloca a uma velocidade de 10 *km/h* e que os lobos se deslocam a uma velocidade máxima de 14 *km/h*, determine se existe uma estratégia para o coelho sair do quadrado sem ser apanhado pelos lobos.

PRAIA
22 de julho de 2015

DURAÇÃO: **4**h **30**m
CADA QUESTÃO: 7 PONTOS

2º dia

4. Sejam a um número real, tal que $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1$, e m, n, p, q números naturais. Prove que se $a^m + a^n = a^p + a^q$ e $a^{3m} + a^{3n} = a^{3p} + a^{3q}$, então $m \cdot n = p \cdot q$.

5. Duas circunferências de raios R e r, com $R > r$, são tangentes entre si exteriormente. Os lados adjacentes à base de um triângulo isósceles são tangentes comuns a essas circunferências. A base do triângulo é tangente à circunferência de raio maior. Determine o comprimento da base do triângulo.

6. Considere a sequência (a_n) dada por $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = a_n^3 - a_n + 1$, para todo $n \geq 1$. Assim, por exemplo, $a_2 = 2^3 - 2 + 1 = 7$ e $a_3 = 7^3 - 7 + 1 = 337$. Prove que se p é um divisor primo de a_n então $p > n$.