Version: Portuguese

Primeiro dia

25 de julho de 2007

Problema 1. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais. Para cada i $(1 \leq i \leq n)$ definimos

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

e

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Prove que para quaisquer números reais $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$,

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) Prove que existem números reais $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ para os quais vale a igualdade em $(*)$.

Problema 2. São dados cinco pontos A, B, C, D e E tais que $ABCD$ é um paralelogramo e $BCED$ é um quadrilátero cíclico (e convexo). Seja ℓ uma recta que passa por A. Suponhamos que ℓ intersecta o segmento DC num ponto interior F e a recta BC em G. Suponhamos também que $EF = EG = EC$. Prove que ℓ é a bissectriz do ângulo DAB.

Problema 3. Numa competição de matemática alguns participantes são amigos. A amizade é sempre recíproca. Dizemos que um grupo de participantes é um *clique* se dois quaisquer deles são amigos (em particular, qualquer grupo com menos de dois participantes é um clique). O *tamanho* de um clique é o número de seus elementos. Sabe-se que nesta competição o tamanho máximo dos cliques é par.

Prove que os participantes podem ser distribuídos em duas salas, de modo que o tamanho máximo dos cliques contidos numa sala é igual ao tamanho máximo dos cliques contidos na outra sala.

Tempo : 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos