

Segundo dia  
26 de julho de 2007

**Problema 4.** No triângulo  $ABC$  a bissetriz do ângulo  $BCA$  intersecta a circunferência circunscrita em  $R$  ( $R \neq C$ ), a mediatriz de  $BC$  em  $P$  e a mediatriz de  $AC$  em  $Q$ . O ponto médio de  $BC$  é  $K$  e o ponto médio de  $AC$  é  $L$ . Mostre que os triângulos  $RPK$  e  $RQL$  têm áreas iguais.

**Problema 5.** Sejam  $a$  e  $b$  inteiros positivos tais que  $4ab - 1$  divide  $(4a^2 - 1)^2$ . Prove que  $a = b$ .

**Problema 6.** Seja  $n$  um inteiro positivo. Considere o conjunto

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

de  $(n + 1)^3 - 1$  pontos no espaço tridimensional. Determine o menor número possível de planos cuja união contém todos os pontos de  $S$  mas não contém  $(0, 0, 0)$ .

*Tempo : 4 horas e 30 minutos  
Cada problema vale 7 pontos*