XV Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2012

1^o de dezembro de 2012 - Duração: 5 horas

1. **(3 pontos)** Seja $\mathbb{Z}$ o anel dos inteiros. Os conjuntos $\mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z}$ e $3\mathbb{Z}$ são semigrupos com relação à multiplicação. Quais deles são isomorfos?

   Nota: Um semigrupo é um conjunto não vazio com operação binária associativa. Dois semigrupos G e H são isomorfos se existe una bijeção f entre eles tal que ela e sua inversa preservem a operação de semigrupo.

2. **(4 pontos)** Seja n um inteiro positivo e $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, diferenciável em $(0, 1)$, com $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Demonstre que existem n reais distintos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(\alpha_k)} = n.$$

3. **(4 pontos)** Encontre todas as ternas (x, y, z) de inteiros que satisfazem

$$x^2 + 7y^2 = 2012z^2.$$

4. **(4 pontos)** Determine se a seguinte série converge ou não e, caso convirja, calcule seu valor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{1 + n + n^2}\right).$$

5. **(6 puntos)** A matriz M é 3×3 e tem entradas inteiras. Seu determinante é 1. Mostre que existe um vetor $v \in \mathbb{Z}^3$ tal que $v^T M v = 1$.

6. **(6 puntos)** Um conjunto de pontos é *rifado* se não há 3 puntos colineares, não há 4 pontos em uma mesma circunferência e para quaisquer 5 pontos distintos A, B, C, D e E os triângulos ABC, ACD e ADE têm circunraios distintos.

   Mostre que se temos um conjunto rifado de 2012 pontos no plano, então é possível escolher 8 deles tais que todos os triângulos que se podem formar com cada três deles têm circunraios distintos.

   Nota: O circunraio de um triângulo ABC é o raio da circunferência que passa por A, B e C.

7. **(7 pontos)** Seja $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ o disco unitário no plano complexo e $0 < a < 1$ um número real. Suponhamos que $f : D \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa tal que $f(a) = 1$ e $f(-a) = -1$.

   (a) Mostre que:
   $$\sup_{z\in D} \big|f(z)\big| \geq \frac{1}{a}.$$

   (b) Mostre que se f não tem raízes então:
   $$\sup_{z\in D} \big|f(z)\big| \geq \exp\left(\frac{1-a^2}{4a}\pi\right).$$