# XIX Semana Olímpica de Matemática

## Nível 1

## Problemas com dígitos: o despertar da força

Diego Eloi

O projeto da XIX Semana Olímpica de Matemática foi patrocinado por:

# Problemas com dígitos: o despertar da força

Semana Olímpica 2016

10 de janeiro de 2016

Antes de começar de fato a resolver problemas deste tipo, vamos resolver um problema para "esquentar":

1. (Maio N1) Sejam $X = a1b9$ e $Y = 51ab$ dois números inteiros positivos onde $a$ e $b$ são dígitos. Sabe-se que $X$ é múltiplo de um número positivo $n$ de dois dígitos e $Y$ é o próximo múltiplo desse número $n$. Encontre o número $n$ e os dígitos $a$ e $b$. Justifique por que não há outras possibilidades.

Neste tipo de problemas com dígitos, existem várias estratégias diferentes, pois dependem do que o problema propõe. No geral, porém, o que quase sempre é utilizado é a *representação decimal* do número, ou seja, sua representação na base 10. Além dessa estratégia, é importante lembrar os critérios de divisibilidade, quantidade de divisores positivos de um número natural e outras propriedades interessantes dos números inteiros. Por exemplo, se a questão quer que encontremos todos os números de três digitos que satisfazem uma determinada propriedade, podemos escrever essa informação como:

$$\overline{abc} = 100.a + 10.b + c$$

onde $a$, $b$ e $c$ são **dígitos**, e, portanto, $0 \leq a, b, c \leq 9$. A limitação dos dígitos pode fazer com que a **força** seja quase que suficiente para resolver o problema! Vejamos no exemplo abaixo:

**Exemplo 1** (OBM - N2 - 2º Fase) Determine a quantidade de inteiros de dois algarismos que são divisíveis pelos seus algarismos.

**Solução**: Suponhamos que $\overline{AB}$ é um desses números. Devemos ter $\overline{AB} = m(A), m(B)$. Antes de tudo, é fácil perceber que todos os números com algarismos iguais satisfazem o que se pede. Caso $B = 1$, temos que $A = 2$. Caso $B = 2$, $A$ só pode ser par, então $A = 4$. Caso $B = 3$, temos $A = 6, 9$. Caso $B = 4$, então $A = 8$. Caso $B = 5$, então $A = 1$. Caso $B = 6$, então $A = 3$. Caso $B = 7$, não existe $A$ que satisfaz. Caso $B = 8$, então $A = 2, 4$. Caso $B = 9$, então $A = 3$. Existem outras maneiras de resolver esse problema, porém, essa resolve.

Para outros problemas é importante também saber sobre divisibilidade e são os problemas mais comuns. Vejamos mais um exemplo:

**Exemplo 2** Chamaremos de *imagem* de um número natural de dois algarismos o número que se obtém trocando a ordem de seus algarismos. Por exemplo, a imagem de 34 é 43. Quais são os números de dois algarismos que somados com sua imagem resultam em um quadrado perfeito?
**Solução**: Se $\overline{AB}$, sua imagem é $\overline{BA}$. Usando a representação decimal, temos a seguinte equação:

$$N = \overline{AB} + \overline{BA} = 10A + B + 10B + A = 11(A + B)$$

Logo, para que encontremos os números que satisfazem o que é pedido, como $N$ deve ser quadrado perfeito, $A + B$ deve ser múltiplo de 11 e como $A$ e $B$ são dígitos, $A + B = 11$. Assim, basta fazer alguns casos: $A = 2 \Rightarrow B = 9$, $A = 3 \Rightarrow B = 8$, $A = 4 \Rightarrow B = 7$, $A = 5B = 6$ e depois disso é só trocar os dois algarismos de lugar.

**Problema 1** (Rioplatense Nível A) Encontre todos os números de dois algarismos que são múltiplos da soma de seus algarismos.

**Problema 2** (Rioplatense Nível A) Utilizando todos os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9, Sofia escreveu três números de três dígitos cada um. Ao somar esses três números obtiveram-se 1665. Em cada um dos três números anteriores intercalou a cifra das centenas com as cifras das unidades, formando três novos números de três cifras. Qual é a soma desses três novos números?

**Problema 3** (OBMN2- 2º Fase) Quais números inteiros positivos menores que 120 podem ser escritos como soma de duas ou mais potências distintas de base 3 e exponente positivo? Por exemplo, $12 = 3^2 + 3^1$ é um número deste tipo mas $18 = 3^2 + 3^2$ não é.

**Problema 4** (OBMN2 - 2º Fase) Um número é palíndromo quando a sequência de dígitos que obtemos ao lê-lo da esquerda para a direita é a mesma que obtemos ao lê-lo da direita para a esquerda. Por exemplo, 12321 é palíndromo. Determine todos os números de dois algarismos $ab$ tais que $ab + ba$ e $ab \times ba$ são palíndromos. Por exemplo, $12 + 21 = 33$ e $12 \times 21 = 252$ mostram que o número 12 satisfaz essas condições.

**Problema 5** (Maio N1) Dizemos que um número é *supersticioso* quando o mesmo é igual a 13 vezes a soma dos seus dígitos. Encontre todos os números supersticiosos.

Vamos lembrar como calculamos a quantidade de divisores positivos de um número natural. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, todo natural $n$ pode ser escrito como o produto de potências de números primos, $n = p_1^{a_1}.p_2^{a_2}...p_m^{a_m}$.

O número de divisores positivos de $n$ escreveremos como $d(n) = (a_1 + 1).(a_2 + 1)...(a_m + 1)$. Ou seja, basta fatorar o número e calcular o produto das potências dos primos somadas a 1. Outros problemas envolvem ainda números com uma quantidade muito grande de algarismos, o que poderia tornar o problema muito difícil, mas uma estratégia que ajuda na resolução é usar novamente a **força**. Faça casos em que a quantidade de algarismos é menor para tentar perceber se existe algum padrão.

**Problema 6** Um número inteiro positivo $n$ tem a propriedade P se a soma de seus divisores positivos é igual a $2n$. Por exemplo: 6 tem a propriedade P, pois $1+2+3+6 = 12$, porém 10 não tem a propriedade P, pois $1+2+5+10 = 18 \neq 20$. Mostre que nenhum quadrado perfeito tem a propriedade P. Observação: Um número inteiro positivo é um quadrado perfeito se é igual ao quadrado de um inteiro. Por exemplo, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$ e $25 = 5^2$ são quadrados perfeitos.

**Problema 7** (Rioplatense Nível A) O número $A$ é formado por 666 algarismos "3"e o número $B$ é formado 666 algarismos "6". Quantos algarismos possui o produto $A.B$?

**Problema 8** (OBMN1-3º Fase) O número $A = B.C$, onde $B$ é um número formado por 2007 algarismos "5"e $C$ é formado por 2007 algarismos "2". Calcule a soma dos algarismos de $9 \times A$.

**Problemas Propostos**

**Problema 9** (OBMN1 - 3º Fase) Vamos chamar de *garboso* o número que possui um múltiplo cujas quatro primeiras casas de sua representação decimal são 2008. Por exemplo, 7 é garboso pois 200858 é múltiplo de 7 e começa com 2008. Observe que $7 \times 28694 = 100858$.
a) Mostre que 17 é garboso.
b) Mostre que todos os inteiros positivos são garbosos.

**Problema 10** (OBMN2- 2ºFase) Dizemos que um número $N$ de quatro algarismos é *biquadrado* quando é igual à soma dos quadrados de dois números: um é formado pelos dois primeiros algarismos de $N$, na ordem em que aparecem em $N$ e o outro, pelos dois últimos algarismos de $N$, também na ordem em que aparecem em $N$.Por exemplo, 1233 é biquadrado pois $1233 = 12^2 + 33^2$. Encontre um outro número biquadrado. **Observação**: Lembre-se de que um número de quatro algarismos não pode começar com zero.

**Problema 11** (Rioplatense Nível A) Diego escreveu um número natural. Se você somar todos os números naturais menos do que o número que Diego escreveu, você encontrarar um número de três dígitos iguais. Determine quais os possíveis números que Diego escreveu.

**Problema 12** (OBMN2 - 2º Fase) Um número de 4 algarismos $\overline{abcd}$ é cha-

mado de *legal* quando a soma dos números formados pelos dois primeiros e pelos dois últimos algarismos é igual ao número formado pelos algarismos centrais (ou seja, $ab + cd = bc$). Por exemplo, 2307 é um número legal pois $23 + 07 = 30$.
(a) Qual é o menor número legal maior do que 2307?
(b) Quantos são os números legais de 4 algarismos?

**Problema 13** Encontre todos os números inteiros de 3 dígitos que sao iguais a 34 vezes a soma de seus dígitos.

**Problema 14** Xavier multiplica quatro dígitos, não necessariamente distintos, e obtém um número terminado em 7. Determine quanto pode valer a soma dos quatros dígitos multiplicados por Xavier. Dê todas as possibilidades.

**Problema 15** (Flanders Jr Olympiads) O preço de um carro é um número inteiro de quatro dígitos escrito com os algarismos como em uma calculadora. Enquanto o vendedor estava distraído, o comprador mudou os números de lugar e reverteu outros de modo que o preço diminuia em 1626. Qual o preço inicial do carro?

**Problema 16** (Olimpíada Matemática Ñandu) Diego escreve números menores que 99999 que tem todos os seus dígitos distintos de 1. Quando multiplicamos todos os dígitos de qualquer um dos números que foram escritos, obtém-se sempre como resultado 168. Quantos números distintos Diego pode escrever? Justifique sua resposta.

**Problema 17** (Ñandu) Diego escreve números que tem 5 algarismos e são múltiplos de 6. Ele só pode usar os dígitos 1, 2, 3 e 4. Além disso, em cada número que ele escreve, tem que usar pelo menos uma vez cada um dos dígitos 1, 2, 3 e 4. Quantos números distintos ele pode escrever?

**Problema 18** Dizemos que um número é *equiperfeito* quando a quantidade de dígitos entre dígitos iguais coincide com o valor do próprio dígito. Por exemplo, 131003 é equiperfeito(1 dígito entre os uns, 3 dígitos entre os três e nenhum dígito entre os zeros), enquanto 131030 não é equiperfeito. É possível reordenar os dígitos do número 4433221100 de modo a torná-lo um número equiperfeito de 10 dígitos?

*Que a força esteja com vocês!*