49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Quarta-feira, 16 de Julho de 2008

Problema 1. Seja ABC um triângulo acutângulo e seja H o seu ortocentro. A circunferência de centro no ponto médio de BC e que passa por H intersecta a reta BC nos pontos A_1 e A_2. Analogamente, a circunferência de centro no ponto médio de CA e que passa por H intersecta a reta CA nos pontos B_1 e B_2, e a circunferência de centro no ponto médio de AB e que passa por H intersecta a reta AB nos pontos C_1 e C_2. Mostre que $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ estão sobre uma mesma circunferência.

Problema 2.

(a) Prove que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1 \qquad (*)$$

para todos os números reais x, y, z, diferentes de 1, com $xyz = 1$.

(b) Prove que existe uma infinidade de ternos de números racionais x, y, z, diferentes de 1, com $xyz = 1$, para os quais ocorre a igualdade em $(*)$.

Problema 3. Prove que existe um número infinito de inteiros positivos n tais que $n^2 + 1$ tem um divisor primo maior que $2n + \sqrt{2n}$.

Duração: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Quinta-feira, 17 de Julho de 2008

Problema 4. Determine todas as funções $f :]0, \infty[\to]0, \infty[$ (ou seja, f é uma função dos reais positivos para os reais positivos) tais que

$$\frac{\left(f(w)\right)^2 + \left(f(x)\right)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

para todos os números reais positivos w, x, y, z com $wx = yz$.

Problema 5. Sejam n e k números inteiros positivos tais que $k \geq n$ e $k - n$ é um número par. São dadas $2n$ lâmpadas numeradas de 1 a $2n$, cada uma das quais pode estar *acesa* ou *apagada*. Inicialmente todas as lâmpadas estão apagadas. Uma *operação* consiste em alterar o estado de exatamente uma das lâmpadas (de acesa para apagada ou de apagada para acesa). Consideremos sequências de operações.

Seja N o número de sequências com k operações após as quais as lâmpadas de 1 a n estão todas acesas e as lâmpadas de $n + 1$ a $2n$ estão todas apagadas.

Seja M o número de sequências com k operações após as quais as lâmpadas de 1 a n estão todas acesas e as lâmpadas de $n + 1$ a $2n$ estão todas apagadas, e durante as quais todas as lâmpadas de $n + 1$ a $2n$ permanecem sempre apagadas.

Determine a razão $\dfrac{N}{M}$.

Problema 6. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo cujos lados BA e BC têm comprimentos diferentes. Sejam ω_1 e ω_2 as circunferências inscritas nos triângulos ABC e ADC, respectivamente. Suponhamos que existe uma circunferência ω tangente à reta BA de forma que A está entre B e o ponto de tangência, tangente à reta BC de forma que C está entre B e o ponto de tangência, e que também seja tangente às retas AD e CD. Prove que as tangentes comuns exteriores a ω_1 e ω_2 se intersectam sobre ω.

Duração: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos