VI OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
8 DE NOVEMBRO DE 2003

PROBLEMA 1. [5 pontos]
Seja $f_0(x) = \log x$, o logaritmo natural de x.
Defina, para todo $n \geq 0$, $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^x f_n(t)dt.$
Prove que o limite abaixo existe e está no intervalo [-1,0):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} f_n(n).$$

PROBLEMA 2. [5 pontos]
Prove que se $p(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros então existe n inteiro tal que $p(n)$ tem mais de 2003 fatores primos distintos.

PROBLEMA 3. [5 pontos]
Várias crianças estão brincando de telefone sem fio. A criança C_0 susurra três palavras para a criança C_1, que susurra o que ouviu para a criança C_2 e assim por diante até uma mensagem chegar à criança C_n. Cada uma das três palavras tem exatamente uma "gêmea" errada (por exemplo, as palavras <u>ração</u> e <u>razão</u> são "gêmeas" pois é muito fácil confundí-las).
Cada criança $(i+1)$ tem probabilidade $1/2$ de ouvir corretamente o que a criança i falou, tem $1/6$ de probabilidade de trocar a primeira palavra dita pela criança i pela sua "gêmea", $1/6$ de probabilidade de trocar a segunda palavra e $1/6$ de probabilidade de trocar a terceira palavra (e portanto nunca troca mais de uma palavra). Note que numa troca a mensagem pode ser acidentalmente corrigida.
Calcule a probabilidade de que a criança C_n ouça exatamente a mensagem original.

PROBLEMA 4. [5 pontos]
Uma família $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de conjuntos é dita (*a*, *b*) uniforme se $|A_i| = a$, para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$ e $|A_i \cap A_j| = b$ para quaisquer $i \neq j$, $i, j \in \{1,\ldots,n\}$.
Prove que dados a, b existe $N_{a,b}$ tal que se $n > N_{a,b}$ e $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é uma família (a,b) uniforme então $\left|\bigcap_{i=1}^n A_i\right| = b$.

PROBLEMA 5. [7 pontos]

Seja z uma raiz da equação $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$, onde $0 \le a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \le k$. Prove que:

i) Se $\operatorname{Re} z > 0$ então $|z| < 1 + \sqrt{k}$ (onde $\operatorname{Re} z$ é a parte real de z).

ii) $\operatorname{Re} z < 1 + \sqrt[3]{k}$.

PROBLEMA 6. [7 pontos]

Sejam $A = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Prove que $B^{\varepsilon_1} A^{s_1} B A^{s_2} B \ldots A^{s_n} B^{\varepsilon_2} \neq I$, para quaisquer $n \ge 1$, onde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_i \in \{0,1\}, i = 1, 2$ e $s_i \in \{-1,1\}, 1 \le i \le n$.

PROBLEMA 7. [8 pontos]

Prove que $\tan(z) = z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$, onde, para $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{sen}(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ e $\tan(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}$.

SOLUÇÕES

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Podemos ver que $f_1(x) = x(\log x - 1)$, $f_2(x) = (1/2)x^2(\log x - 3/2)$ e

$f_3(x) = (1/6)x^3(\log x - 11/6)$ **[Determinação dos f_1, f_2, e f_3 vale 1 ponto]**

Em geral, podemos provar por indução que:

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(\log x - H_n) \tag{1}$$

para todo inteiro $n \ge 0$, onde $H_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ é o assim chamado *n*-ésimo *número harmônico.* De fato, (1) vale para $n = 0$, e se ela é válida para $n \ge 0$, então

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{1}{(n+1)!} t^{n+1}(\log t - H_{n+1})\Big|_{\varepsilon}^{x} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}(\log x - H_{n+1}), \end{aligned}$$

pois $(d/dt)(1/(n+1)!t^{n+1}(\log t - H_{n+1}) = (1/n!)t^n(\log t - H_n) = f_n(t)$.

Alternativamente, inspecionando casos pequenos, vemos que

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(\log x - C_n) \tag{2}$$

para alguma constante C_n que depende apenas de n. Observando que

$$f'_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}x^n\left(\log x - C_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right), \tag{3}$$

temos que $C_{n+1} = C_n + 1/(n+1)$. Como $C_1 = 1$, temos que $C_n = H_n$.

[Valor da determinação de (1): 3 pontos; 2 pontos se mostrar que f_n se escreve como em (2), mas não conseguir determinar C_n.]

Temos assim que

$$\frac{n!}{n^n} f_n(n) = \frac{n!}{n^n} \times \frac{n^n}{n!}(\log n - H_n) = \log n - H_n, \tag{4}$$

e agora basta provar que $\lim_{n\to\infty}(\log n - H_n)$ existe e que este limite pertence a [-1,0). Temos

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} > \log n > \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$, pois $\displaystyle\log n = \int_1^n \frac{dt}{t}$.

Portanto, para $n \ge 2$ $\displaystyle -1 < \log n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} < 0$. Além disso, $\displaystyle\log n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$ é uma seqüência decrescente.

Assim, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\log n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}) \in [-1,0)$. Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, segue que

$$\lim_{n\to\infty}(\log n - H_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\log n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) \in [-1,0).$$

[Existência e valor do limite: 2 pontos (1 ponto para existência e 1 ponto por provar que o limite está no intervalo dado no enunciado).]

Obs: Na verdade $\lim_{n\to\infty}(\log n - H_n) = -\gamma = -0,577\ldots$, onde γ é a constante de Euler.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

Primeira Solução

Suponha que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $f(n)$ nunca tenha mais de 2003 fatores primos distintos. Tome $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $f(n_0)$ tenha a maior quantidade de fatores primos distintos, digamos j.

$f(n_0) = \pm p_1^{\alpha_1} \dots p_j^{\alpha_j} = k$ **[1 ponto]**

Podemos supor $n_0 = 0$ (considerando $g(n) = f(n - n_0)$).

Assim teremos:

$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + k.$

Tomando $x = wk^2 \Rightarrow f(x) \equiv k (\bmod k^2)$

$\Rightarrow f(x) = ak^2 + k = (ak+1)k$, para algum a inteiro.

Como $mdc(a_{k+1}, k) = 1$, se $(ak+1) \neq \pm 1$ teremos que $f(x)$ terá pelo menos um fator primo a mais. Absurdo! **[+3 pontos]**

De fato, isso deve acontecer pois $f(n) = \pm k$ admite no máximo $2n$ raízes enquanto $x = wk^2$ pode assumir infinitos valores $(w \in \mathbb{Z})$. **[+1 ponto]**

Segunda Solução

1- Seja $S = \{ p \text{ primo } \mid p \text{ divide } f(n) \text{ para algum } n \in \mathbb{Z}\}$

Se $\# S > 2003$, podemos escolher primos distintos $p_1, p_2, \dots, p_{2004}$ e inteiros $a_1, a_2, \dots, a_{2004}$ tais que valem as congruências $f(a_i) \equiv 0 (\bmod p_i)$ (para cada i)

Pelo teorema chinês dos restos podemos encontrar um x inteiro que resolva a todas as congruências $x \equiv a_i (\bmod p_i)$.

Para tal x teremos $p_1 p_2, \dots, p_{2004} \mid f(x)$. **[2 pontos]**

2- Suponha então que $\# S \leq 2003$. Seja $A = \{ m \in \mathbb{Z} \mid m = 0 \text{ ou } p \text{ primo}, p \mid m \Rightarrow p \in S\}$. Então $m \in A \Rightarrow m = \pm p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}, S = \{p_1, \dots, p_r\}, r \leq 2003$.

Se $m \in A, m \leq N \Rightarrow \alpha_i \leq \log_{p_i} N \leq \log_2 N, \forall i \Rightarrow |A \cap [-N, N]| \leq 2(\log_2 N + 1)^{2003} + 1$, mas existe $c > 0$ tal que $|f(\mathbb{Z}) \cap [-N, N]| \geq C \sqrt[d]{N}$, onde d é o grau de f, e como $1 + 2(\log_2 N + 1)^{2003} < (\log N)^{2004} < C \sqrt[d]{N}$ para todo *N* suficientemente grande, isso é um absurdo. **[+3 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Sejam as 3 palavras: a,b,c e suas gêmeas a',b',c'. Identificamos as possíveis combinações de 3 palavras com os vértices de um cubo da seguinte forma:

$A=(a,b,c)$ (seqüência correta)

$B_1=(a',b,c)$

$B_2=(a,b',c)$

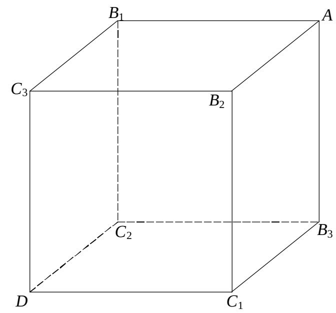
$B_3=(a,b,c')$

$C_1=(a,b',c')$

$C_2=(a',b,c')$

$C_3=(a',b',c)$

$D=(a',b',c')$



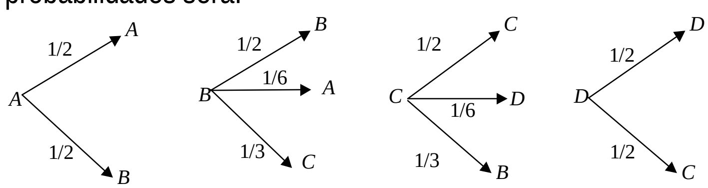
Podemos repensar o problema dizendo que a cada passo nos movimentamos uma aresta segundo as probabilidades dadas.

Pela evidente simetria, as probabilidades de após n passos, estarmos em B_1, B_2 ou B_3 são iguais, o mesmo valendo para C_1, C_2, C_3.

Por isso, agrupamos os vértices do cubo em 4 grupos.

A ; $B=\{B_1,B_2,B_3\}$; $C=\{C_1,C_2,C_3\}; D$. **[1 ponto]**

Nosso diagrama de probabilidades será:



Definimos então:

$A_n =$ probabilidade de estarmos no grupo A após n passos.

B_n, C_n, D_n são definidos analogamente.

Temos então as recorrências:

$$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{6}b_{n-1}$$
$$b_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{3}c_{n-1}$$
$$c_n=\frac{1}{3}b_{n-1}+\frac{1}{2}c_{n-1}+\frac{1}{2}d_{n-1}$$
$$d_n=\frac{1}{2}d_{n-1}+\frac{1}{6}c_{n-1}$$

ou

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

[1 ponto]

Nosso objetivo é encontrar a_n. Temos agora duas maneiras de terminar a solução:

Primeira Solução:

Defina para isso: $\begin{cases} r_n = a_n + d_n \\ l_n = b_n + c_n \end{cases}$

Daí:

$r_n = \frac{1}{2} r_{n-1} + \frac{1}{6} l_{n-1}$ (1)

$l_n = \frac{1}{2} r_{n-1} + \frac{5}{6} l_{n-1}$ (2)

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$r_{n+1} = \frac{4}{3} r_n - \frac{1}{3} r_{n-1} \ (n \geq 1)$

o que juntamente com os casos iniciais

$r_0 = 1; \quad r_1 = 1/2; \quad r_2 = 1/3; \quad r_3 = 10/36$

Nos dá: $r_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Por outro lado, definindo:

$\begin{cases} x_n = a_n - d_n \\ y_n = b_n - c_n \end{cases}$

Teremos:

$x_n = \frac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{6} y_{n-1}$ (3)

$y_n = \frac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{6} y_{n-1}$ (4)

Substituindo (3) em (4) encontramos:

$x_{n+1} = \frac{2}{3} x_n$ (para $n \geq 1$, cuidado!!)

$\Rightarrow x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} x_1 = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2}$

Conclusão:

$a_n = \frac{1}{2}(r_n + x_n)$

$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \ \forall n \geq 1.$ **[+3 pontos]**

Segunda Solução:

Queremos encontrar os autovalores de X. Seja

$$Y = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Temos $Y^{-1} = Y^T = Y$.

$$YXY = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 0 & 0 \\ 1/2 & 5/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_+ & 0 \\ 0 & X_- \end{pmatrix}$$

Os autovalores de X_+ e X_- são claramente 1, 1/3 e 0, 2/3, respectivamente **[+2 pontos]**

Assim

$$a_n = v_1 + v_2\left(\frac{1}{3}\right)^n + v_3(0)^n + v_4\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

e alguns casos deixam claro que

$v_1 = \frac{1}{8}, \quad v_2 = \frac{3}{8}, \quad v_3 = \frac{1}{8}, \quad v_4 = \frac{3}{8}.$ **[+1 ponto]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Sejam a e b inteiros não-negativos. Se $b=0$, então é fácil ver que podemos tomar $N_{a,b}=1$. Suponha agora que $b\ge 1$, e tome $N_{a,b}=a\cdot\binom{a}{b}+2$. Vamos provar que esta escolha de $N_{a,b}$ serve. Para tanto, suponha que temos $A_1,\dots,A_n$ uma família (a,b) uniforme com $n>N_{a,b}$. Existe um conjunto $B\subset A_1$ com $|B|=b$ tal que para pelo menos $(n-1)\binom{a}{b}^{-1}$ índices j com $1<j\le n$, temos $A_1\cap A_j=B$. Sem perda de generalidade, podemos supor que isto vale para todo j com $1<j\le j_0=1+\left\lceil (n-1)\binom{a}{b}^{-1}\right\rceil$. Note que

(*) os conjuntos $A_j \setminus A_1$ com $1<j\le j_0$ são dois a dois disjuntos.

[3 pontos por fixar um conjunto e conseguir conjuntos satisfazendo (*).]

Se todo conjunto A_k com $j_0<k\le n$ é tal que $A_1\cap A_k=B$, então $\bigcap_{i=1}^{n}A_i=B$, e vale a conclusão do problema. Suponha agora que $A_1\cap A_k\ne B$ para algum $j_0<k\le n$.

Então $A_k\cap(A_j\setminus A_1)\ne\varnothing$ para todo $1<j\le j_0$. Entretanto, como vale (*) e $j_0-1>|A_k|=a$, isto é impossível. Isto mostra que todo conjunto A_k com $j_0<k\le n$ é tal que $A_1\cap A_k=B$, de forma que $\bigcap_{i=1}^{n}A_i=B$, e vale a conclusão do problema. **[2 pontos se deduzir a conclusão de (*).]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5

i) Seja $R=|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Temos $1+\frac{a_{n-1}}{z}+\frac{a_{n-2}}{z^2}+\dots+\frac{a_0}{z^n}=0$. Como $\frac{a_{n-1}}{z}=\frac{a_{n-1}(\alpha-\beta i)}{\alpha^2+\beta^2}$, $\mathrm{Re}\left(\frac{a_{n-1}}{z}\right)=\frac{a_{n-1}\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\ge 0$.

Como temos $\mathrm{Re}\left(\frac{a_{n-2}}{z^2}+\frac{a_{n-3}}{z^3}+\dots+\frac{a_0}{z^n}\right)=-\mathrm{Re}\left(1+\frac{a_{n-1}}{z}\right)\le -1$ **[1 ponto]**,

devemos ter em particular $\left|\frac{a_{n-2}}{z^2}+\dots+\frac{a_0}{z^n}\right|\ge 1$, mas

$\left|\frac{a_{n-2}}{z^2}+\dots+\frac{a_0}{z^n}\right|\le\frac{k}{R^2}+\frac{k}{R^3}+\dots+\frac{k}{R^n}\le\frac{k}{R^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{R^j}=\frac{k}{R^2}\cdot\frac{R}{R-1}=\frac{k}{R(R-1)}$. Assim, devemos ter $\frac{k}{R(R-1)}\ge 1$, ou seja, $R(R-1)\le k$. Se $R\ge 1+\sqrt{k}$, $R-1\ge\sqrt{k}$ e $R(R-1)\ge\sqrt{k}(1+\sqrt{k})>k$, absurdo. Assim, $|z|=R<1+\sqrt{k}$. **[+2 pontos]**

ii) Temos dois casos:

a) $z=\alpha+\beta i,\alpha\ge 0,|\beta|\le\alpha$. Nesse caso, $\frac{a_{n-2}}{z^2}=\frac{a_{n-2}(\alpha-\beta i)^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}=\frac{a_{n-2}(\alpha^2-\beta^2-2\alpha\beta i)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}$, donde

$\mathrm{Re}\left(\frac{a_{n-2}}{z^2}\right)=\frac{(\alpha^2-\beta^2)\cdot a_{n-2}}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\ge 0$. Assim, $\mathrm{Re}\left(\frac{a_{n-3}}{z^3}+\dots+\frac{a_0}{z^n}\right)=-\mathrm{Re}\left(1+\frac{a_{n-1}}{z}+\frac{a_{n-2}}{z^2}\right)\le -1$, donde $1 \le \left| \frac{a_{n-3}}{z^3} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \right| \le \frac{k}{R^3} + \ldots + \frac{k}{R^n} \le \frac{k}{R^3} \cdot \frac{R}{R-1} = \frac{k}{R^2(R-1)}$, donde $R^2(R-1) \le k$. Se $R \ge 1 + \sqrt[3]{k}, R-1 \ge \sqrt[3]{k}$ e $R^2(R-1) > k$, absurdo. Assim, $|z| = R < 1 + \sqrt[3]{k}$. **[1 ponto]**

b) $z = \alpha + \beta i,\ \alpha \ge 0,\ |\beta| > \alpha$. Como z é raiz de $P \Leftrightarrow \bar{z}$ é raiz de *P*, podemos supor sem perda de generalidade que $\beta > \alpha$. Temos então $\operatorname{Im}\left(\frac{a_{n-1}}{z}\right) = \frac{-\beta a_{n-1}}{\alpha^2 + \beta^2} \le 0$ e $\operatorname{Im}\left(\frac{a_{n-2}}{z^2}\right) = \frac{-2\alpha\beta a_{n-2}}{R^4}$, enquanto $\operatorname{Re}\left(\frac{a_{n-1}}{z}\right) = \frac{\alpha a_{n-1}}{\alpha^2 + \beta^2} \ge 0$ e

$$\operatorname{Re}\left(\frac{a_{n-2}}{z^2}\right) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)a_{n-2}}{R^4} \ge -\frac{(\alpha^2 + \beta^2)a_{n-2}}{R^4} = \frac{-a_{n-2}}{R^2}.$$

Assim, como

$$\left| \frac{a_{n-3}}{z^3} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \right| \le \frac{k}{R^2(R-1)}, \left| \operatorname{Re}\left(\frac{a_{n-3}}{z^3} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \right) \right| \le \frac{k}{R^2(R-1)} \text{ e } \left| \operatorname{Im}\left(\frac{a_{n-3}}{z^3} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \right) \right| \le \frac{k}{R^2(R-1)},$$

portanto temos

(*) $\frac{a_{n-2}}{R^2} + \frac{k}{R^2(R-1)} \ge \operatorname{Re}\left(1 + \frac{a_{n-1}}{z}\right) \ge 1$ e

(**) $\frac{k}{R^2(R-1)} \ge -\operatorname{Im}\left(\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2}\right) \ge \frac{2a_{n-2}\alpha\beta}{R^4}$. Supondo por absurdo que $\alpha \ge 1 + \sqrt[3]{k}$, temos $R \ge \alpha \ge 1 + \sqrt[3]{k}$ e logo $R^2(R-1) > k$.

De (**), $a_{n-2} \le \frac{kR^2}{2\alpha\beta(R-1)}$, e logo, de (*), $\frac{k}{2\alpha\beta(R-1)} + \frac{k}{R^2(R-1)} \ge 1$, donde $\frac{kR^2}{\alpha\beta} + 2k \ge 2R^2(R-1)$, e logo $\alpha\beta \le \frac{kR^2}{2(R^2(R-1)-k)}$. Como $\alpha < \beta$, $\alpha^2 \le \alpha\beta \le \frac{kR^2}{2(R^2(R-1)-k)}$. Como $R^2 = \alpha^2 + \beta^2 > 2\alpha^2$, e $\alpha \ge 1 + \sqrt[3]{k}$, temos $R > \alpha\sqrt{2} > 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{k}, R^2 > 2\alpha^2 > 2\sqrt[3]{k^2}$, donde

$$\frac{kR^2}{2(R^2(R-1)-k)} = \frac{k}{2\left(R - 1 - \frac{k}{R^2}\right)} < \frac{k}{2\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{k} - \frac{k}{2\sqrt[3]{k^2}}\right)} = \frac{k}{(2\sqrt{2}-1)\sqrt[3]{k}} < \sqrt[3]{k}^2 < \alpha^2,$$ absurdo.

[+3 pontos]

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6

Temos $AB = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **[1 ponto]**

Como $B^{\varepsilon_1}A^{s_1}BA^{s_2}B\ldots A^{s_k}B^{\varepsilon_2} = I \Leftrightarrow A^{s_1}BA^{s_2}B\ldots A^{s_k}B = B^{\varepsilon_1+1-\varepsilon_2}B$ e $B^{\varepsilon_1+1-\varepsilon_2} \in \{I, B\}$, é suficiente mostrar que para todo $k \ge 1, s_1, \ldots, s_k \in \{-1, 1\}$, $A^{s_1}BA^{s_2}B\ldots A^{s_k}B$ tem entradas irracionais para concluir que $B^{\varepsilon_1}A^{s_1}B\ldots A^{s_k}B^{\varepsilon_2} \ne I$ (pois de fato as entradas de I e de B são todas inteiras).

[Conjecturar que $A^{s_1}B\ldots A^{s_k}B$ tem sempre entradas irracionais, para todo $k\ge 1, s_1,\ldots,s_k\in\{-1,1\}$: 2 pontos]

Para isso, vamos mostrar por indução que para todo $k\ge 1, s_1,\ldots,s_k\in\{-1,1\}$, $A^{s_1}BA^{s_2}B\ldots A^{s_k}B$ é sempre da forma $\frac{1}{2^k}\begin{pmatrix} a_n & b_n\sqrt{3} & c_n\sqrt{3} \\ d_n\sqrt{3} & e_n & f_n \\ g_n\sqrt{3} & h_n & i_n \end{pmatrix}$, onde a_n, c_n, d_n e f_n são inteiros ímpares e b_n, e_n, g_n, h_n e i_n são inteiros pares. Para isso, seja $A^{s_{k+1}}B=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \varepsilon\sqrt{3}/2 \\ -\varepsilon\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon\sqrt{3} \\ -\varepsilon\sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, onde $\varepsilon\in\{-1,1\}$. Temos então $A^{s_1}BA^{s_2}B\ldots A^{s_k}BA^{s_{k+1}}B=\frac{1}{2^{k+1}}\begin{pmatrix} a_n-3\varepsilon b_n & -2c_n\sqrt{3} & (\varepsilon a_n+b_n)\sqrt{3} \\ (d_n-\varepsilon e_n)\sqrt{3} & -2f_n & 3\varepsilon d_n+e_n \\ (g_n-\varepsilon h_n)\sqrt{3} & -2i_n & 3\varepsilon g_n+h_n \end{pmatrix}$, e é fácil ver que $a_{n+1}=a_n-3\varepsilon b_n, c_{n+1}=\varepsilon a_n+b_n, d_{n+1}=d_n-\varepsilon e_n$ e $f_{n+1}=3\varepsilon d_n+e_n$ são inteiros ímpares enquanto $b_{n+1}=-2c_n, e_{n+1}=-2f_n, g_{n+1}=g_n-\varepsilon h_n, h_{n+1}=-2i_n$ e $i_{n+1}=3\varepsilon g_n+h_n$ são inteiros pares. **[+4 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 7

Seja $z=a-bi$, logo $iz=b+ai$. Queremos provar que $b=0$.

Temos $z=\tan z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}$, donde $\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}=iz$, logo $e^{2iz}=\frac{1+iz}{1-iz}$, ou seja, $e^{2b}(\cos 2a+i\,\mathrm{sen}\,2a)=\frac{1+b+ai}{1-b-ai}=\frac{1-b^2-a^2+2ai}{(1-b)^2+a^2}$. Assim, devemos ter (calculando normas) $e^{4b}=\frac{(1+b)^2+a^2}{(1-b)^2+a^2}$ e (calculando argumentos) $\tan 2a=\frac{2a}{1-b^2-a^2}$. **[1 ponto]**

De $e^{4b}=\frac{(1+b)^2+a^2}{(1-b)^2+a^2}$, temos $e^{4b}-1=\frac{4b}{(1-b)^2+a^2}$, donde, supondo por contradição que $b\neq 0$, $a^2=\frac{4b}{e^{4b}-1}-(1-b)^2$. **[1 ponto]**

Como $e^{4b}=\frac{(1+b)^2+a^2}{(1-b)^2+a^2}\Leftrightarrow e^{-4b}=\frac{(1-b)^2+a^2}{(1+b)^2+a^2}$ e $\tan 2a=\frac{2a}{1-b^2-a^2}=\frac{2a}{1-(-b)^2-a^2}$, podemos supor sem perda de generalidade que $b\ge 0$, e como $\tan 2a=\frac{2a}{1-b^2-a^2}\Leftrightarrow\tan(-2a)=\frac{-2a}{1-b^2-(-a)^2}$, podemos supor sem perda de generalidade que $a>0$. **[+1 ponto].**

Temos então $e^{4b}>1+4b+\frac{1}{2}(4b)^2$, e logo $a^2=\frac{4b}{e^{4b}-1}-(1-b)^2<\frac{4b}{4b+8b^2}-(1-b)^2=\frac{1}{1+2b}-(1-b)^2$.

Se $0\le b\le\frac{1}{4}$, temos $a^2\le 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}<\frac{1}{2}$. Se $\frac{1}{4}\le b\le\frac{1}{2}$, temos $a^2\le\frac{1}{1+2\cdot\frac{1}{4}}-\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{12}<\frac{1}{2}$, e se $b \geq \frac{1}{2}$ temos $a^2 \leq \frac{1}{1+2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$. Em qualquer caso, $|a| \leq \sqrt{\frac{1}{2}} < \frac{3}{4} < \frac{\pi}{4}$, donde $\frac{1-b^2-a^2}{(1-b)^2+a^2} = \cos(2a) > 0$, donde $a^2+b^2<1$. **[+1 ponto]**

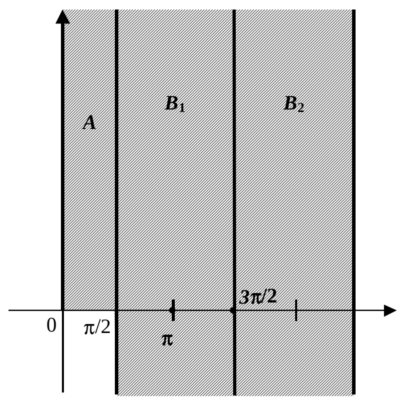
Notemos agora que
$\frac{4b}{e^{4b}-1} - (1-b)^2 \leq b^2 \Leftrightarrow 4b \leq (e^{4b}-1)(1-2b+2b^2) \Leftrightarrow 1+2b+2b^2 \leq e^{4b}(1-2b+2b^2)$.
Se $f(b) = 1+2b+2b^2$ e $g(b) = e^{4b}(1-2b+2b^2)$, temos $f(0) = 1 = g(0)$, $f'(b) = 4b+2$, $g'(b) = e^{4b}(2-4b+8b^2)$, $f''(b) = 4$, $g''(b) = e^{4b}(4+32b^2)$, e logo $f'(0) = 2 = g'(0)$ e $f''(b) \leq g''(b), \forall b \geq 0$, donde $f(b) \leq g(b), \forall b \geq 0$, e logo $a^2 = \frac{4b}{e^{4b}-1} - (1-b)^2 \leq b^2$. **[+1 ponto]**
Agora, se $a=0$, teremos $e^{2b} = \frac{1+b}{1-b}$, donde $b<1$, mas $(1-b)e^{2b} < 1+b$ para todo $b>0$, pois se $\tilde{f}(x) = (1-x)e^{2x}$ e $\tilde{g}(x) = 1+x$, temos $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = 1$, $\tilde{f}'(x) = (1-2x)e^{2x}$, $\tilde{g}'(x) = 1$ e logo $\tilde{f}(0) = \tilde{g}'(0) = 1$, e $\tilde{f}''(x) = 4xe^{2x} \leq 0 = \tilde{g}''(x), \forall x \geq 0$. Podemos portanto supor $a>0$. **[+1 ponto]**
Assim, $\tan 2a = \frac{2a}{1-b^2-a^2} \geq \frac{2a}{1-2a^2}$, pois $a^2 \leq b^2$, mas $\tan 2a = \frac{\mathrm{sen}\,2a}{\cos 2a} < \frac{2a}{1-\frac{1}{2}(2a)^2} = \frac{2a}{1-2a^2}$ para $a>0$, pois $\mathrm{sen}\,x < x$ para $x<0$ e $\cos x + \frac{x^2}{2} \geq 1, \forall x \geq 0$ (de fato, se $h(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$, $h'(x) = x - \mathrm{sen}\,x \geq 0, \forall x \geq 0$). Note que, como $a^2 \leq b^2$ e $a^2+b^2<1$, temos $2a^2 \leq a^2+b^2 < 1$. Isto dá $\frac{2a}{1-2a^2} > \tan 2a \geq \frac{2a}{1-2a^2}$, o que é uma contradição. **[+2 pontos].**

SEGUNDA SOLUÇÃO:
Vamos considerar separadamente as seguintes regiões:

$$A = \{z = a+bi \,|\, 0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}, b \geq 0\}$$

$$B_k = \left\{ z = a+bi \,\middle|\, k\pi - \frac{\pi}{2} \leq a \leq k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}, k>0.$$

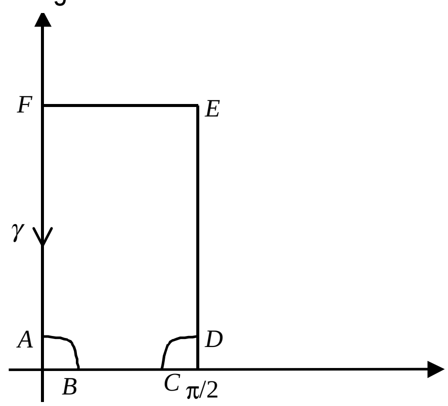
Note que em cada região B_k há uma solução real.



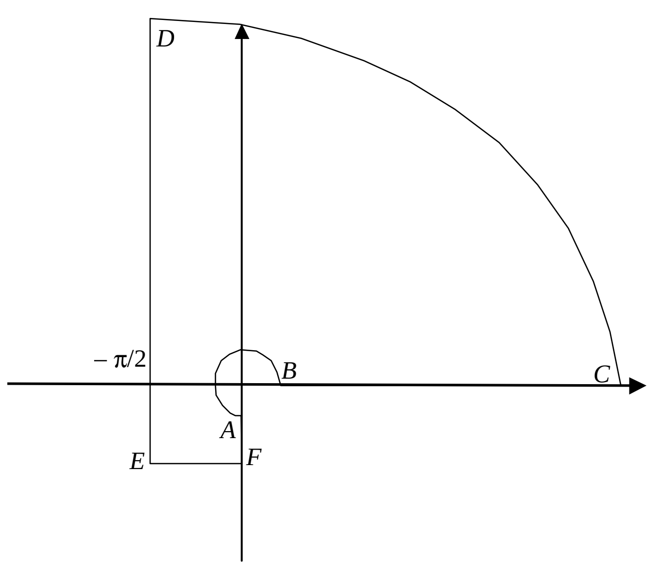
Basta demonstrar que $z = 0$ é a única solução em A e que há uma única solução em cada região B_k. **[1 ponto]**

Região A: Seja $f(z) = \tan z - z$. Queremos provar que f não admite nenhuma raiz em *A* exceto $z = 0$.

Considere um caminho γ como na figura:



A imagem de γ por f é:



onde o comportamento do arco AB é indicado pela série de Taylor de f, o de BC pelo comportamento da função real tangente, o arco CD pelo comportamento da função perto do polo, o arco DE pelo comportamento da função coth, o arco EF pelo comportamento quando $b >> 0$ e o arco AF pelo comportamento da função tanh.
Em todo caso, é claro que a curva $f(\gamma)$ dá 0 voltas ao redor da origem donde f tem 0 raízes dentro de γ. **[4 pontos]**

Região B_k :

Seja $C_k = \{z = a + b_i \mid k\pi - \frac{\pi}{2} \le a \le k\pi\}$ e $D_k = \{z = a + b_i \mid k\pi \le a \le k\pi + \frac{\pi}{2}\}$.
A imagem por tan da região C_k está contida no segundo o terceiro quadrantes logo não há pontos fixos em C_k. Basta verificar que a função tan tem um único ponto fixo em D_k. Seja γ como abaixo; a imagem por tan da curva γ é como $\tilde{\gamma}$ na figura (o arco AF dá o comportamento perto do polo, os arcos AB e EF vem do comportamento da função cotanh, o arco CD do comportamento de tanh e os arcos BC e DE do comportamento quando $|b| >> 0$). Como $\tilde{\gamma}$ dá uma volta ao redor de γ temos exatamente um ponto fixo. **[+3 pontos]**