XVI Olimpíada de Matemática do Cone Sul
Sucre-Bolívia 2005

PRIMEIRO DIA
Terça-feira, 24 de Maio

PROBLEMA 1

Considere a seguinte seqüência:

a_1 = último dígito da soma dos dígitos do número 2005

a_2 = último dígito da soma dos dígitos do número 20052005

a_3 = último dígito da soma dos dígitos do número 200520052005

...

a_n = último dígito da soma dos dígitos do número $\underbrace{20052005\ldots2005}_{n \text{ vezes } 2005}$

Calcule: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdot \cdot \cdot + a_{2005}$

PROBLEMA 2

Seja ABC um triângulo acutângulo e sejam AN, BM e CP as alturas relativas aos lados BC, CA e AB, respectivamente. Sejam R, S as projeções de N sobre os lados AB, CA, respectivamente, e Q, W as projeções de N sobre as alturas BM e CP, respectivamente.

(a) Mostre que R, Q, W, S são colineares;
(b) Mostre que $MP = RS - QW$.

PROBLEMA 3

A unidade monetária de um certo país se chama *reo*, e todas as moedas que circulam são de números inteiros de *reos*. Em um grupo de três pessoas, cada uma tem 60 *reos* em moedas (mas não se sabe que tipo de moedas cada uma tem). Cada uma das três pessoas pode pagar a cada uma das outras qualquer valor inteiro entre 1 e 15 *reos*, inclusive, talvez com troco. Mostre que as três pessoas em conjunto podem pagar exatamente (sem troco) qualquer valor inteiro entre 45 e 135 *reos*, inclusive.

DURAÇÃO: 3½ horas
CADA PROBLEMA VALE 10 PONTOS

XVI Olimpíada de Matemática do Cone Sul
Sucre-Bolívia 2005

SEGUNDO DIA
Quarta-feira, 25 de Maio

PROBLEMA 4

Seja ABC um triângulo isósceles, com $AB = AC$. Uma reta r que passa pelo incentro I de ABC intersecta os lados AB e AC nos pontos D e E, respectivamente. F e G são pontos sobre o lado BC tais que $BF=CE$ e $CG=BD$. Mostre que o ângulo $\angle FIG$ é constante ao variar r.

PROBLEMA 5

Diremos que um número de 20 dígitos é *especial* se é impossível representá-lo como produto de um número de 10 dígitos por um número de 11 dígitos. Determine qual é a máxima quantidade possível de números consecutivos que são *especiais*.

PROBLEMA 6

No plano cartesiano traçamos circunferências de raio 1/20 com centros em cada ponto de coordenadas inteiras. Mostre que qualquer circunferência de raio 100 que se trace no plano intersecta pelo menos uma das circunferências pequenas.

DURAÇÃO: 3½ horas
CADA PROBLEMA VALE 10 PONTOS