Primeiro dia
8 de maio

Versão em português

Problema 1
No quadrilátero convexo $ABCD$, sejam E e F os pontos médios dos lados AD e BC, respectivamente. Os segmentos CE e DF cortam-se em O. Demonstrar que se as retas AO e BO dividem o lado CD em três partes iguais então $ABCD$ é um paralelogramo.

Problema 2
Duas pessoas, A e B, jogam o seguinte jogo: eles retiram moedas de uma pilha que contém, inicialmente, 2006 moedas. Os jogadores jogam alternadamente retirando, em cada jogada, 1 a 7 moedas; cada jogador guarda as moedas que retira. Se quiser, um jogador pode passar (não retirar moedas em sua vez), mas para isso deve pagar 7 moedas das que retirou da pilha em jogadas anteriores. Estas 7 moedas são colocadas em uma caixa separada e não interferem mais no jogo. Ganha quem retira a última moeda, e A começa o jogo.
Determinar qual jogador pode assegurar a vitória, não importando como jogue o outro. Mostrar uma estratégia vencedora e explicar por que é vencedora.

Problema 3
Seja n um número natural. A sucessão finita α de inteiros positivos tem, entre seus termos, exatamente n números distintos (α pode ter números repetidos). Além disso, se de um de seus termos qualquer subtraímos 1, obtemos uma sucessão que tem, entre seus termos, pelo menos n números positivos distintos. Qual é o valor mínimo que pode ter a soma de todos os termos da sucessão α?

Tempo: 4 horas

XVII OLIMPIADA MATEMATICA DEL CONO SUR

del 5 al 11 de mayo de 2006 – Belén de Escobar – Buenos Aires - Argentina

Segundo dia
9 de maio

Versão em português

Problema 4

Daniel escreveu em uma lousa, de cima para baixo, uma lista de números inteiros positivos menores ou iguais a 10. Ao lado de cada número da lista de Daniel, Martín anotou a quantidade de vezes que esse número aparece na lista de Daniel e obteve assim uma lista de mesmo tamanho. Se lemos a lista de Martín de baixo para cima obtemos a mesma lista de números que Daniel escreveu de cima para baixo. Encontre o maior tamanho que a lista de Daniel pode ter.

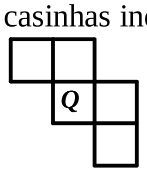
Problema 5

Encontrar todos os inteiros positivos n tais que $\left[\sqrt{n}\right]-2$ divide $n-4$ e $\left[\sqrt{n}\right]+2$ divide $n+4$.

($[r]$ denota a parte inteira de r, ou seja, o maior inteiro que é menor ou igual a r. Por exemplo: $[2,5]=2$; $\left[\sqrt{3}\right]=1$; $[5]=5$.)

Problema 6

Dividimos o plano em casinhas quadradas de lado 1, traçando retas paralelas aos eixos coordenados. Cada casinha é pintada de branco ou preto. A cada segundo, recolorimos simultaneamente todas as casinhas, de acordo com a seguinte regra: cada casinha Q adota a cor que mais aparece na configuração de cinco casinhas indicadas na figura



O processo de recoloração é repetido indefinidamente.

a) Determinar se existe uma coloração inicial com uma quantidade finita de casinhas pretas tal que sempre há pelo menos uma casinha preta, não importando quantos segundos se passaram desde o início do processo.

b) Determinar se existe uma coloração inicial com uma quantidade finita de casinhas pretas tal que o número de casinhas pretas, após alguma quantidade de segundos, seja pelo menos 10^{10} vezes maior que o número inicial de casinhas pretas.

Tempo: 4 horas