# XVIII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

13 a 20 de setembro, Mar del Plata - Argentina

## PRIMEIRO DIA

**PROBLEMA 1**

a) Têm-se duas sucessões, cada uma de 2003 inteiros consecutivos, e um tabuleiro de 2 linhas e 2003 colunas

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | ……… | | |
| | | | ……… | | |

Decida se é sempre possível distribuir os números da primeira sucessão na primeira linha e os da segunda sucessão na segunda linha, de modo que os resultados obtidos ao somar os dois números de cada coluna formem uma nova sucessão de 2003 números consecutivos.

b) E se trocássemos 2003 por 2004?

Tanto em *a*) como em *b*), se a resposta for afirmativa, explique como distribuiria os números, e se for negativa, justifique o porquê.

**PROBLEMA 2**

Sejam $C$ e $D$ dois pontos da semicircunferência de diâmetro $AB$ tais que $B$ e $C$ estão em semiplanos distintos em relação à reta $AD$. Denotemos por $M$, $N$ e $P$ os pontos médios de $AC$, $DB$ e $CD$, respectivamente. Sejam $O_A$ e $O_B$ os circuncentros dos triângulos $ACP$ e $BDP$. Demonstre que as rectas $O_A O_B$ e $MN$ são paralelas.

**PROBLEMA 3**

Pablo copia o seguinte problema:

*Considere todas as sucessões de 2004 números reais* $(x_0, x_1, x_2, ..., x_{2003})$,
*tais que*

$$x_0 = 1,$$
$$0 \le x_1 \le 2x_0,$$
$$0 \le x_2 \le 2x_1,$$
$$\vdots$$
$$0 \le x_{2003} \le 2x_{2002}.$$

*Entre todas estas sucessões, determine aquela para a qual a expressão seguinte assume o seu maior valor: S =* … .

Quando Pablo ia copiar a expressão $S$, apagaram o quadro. Só conseguia lembrar-se de que $S$ era da forma

$$S = \pm x_1 \pm x_2 \pm ... \pm x_{2002} + x_{2003},$$

onde o último termo, $x_{2003}$, tinha coeficiente +1, e os anteriores tinham coeficiente +1 ou –1.

Demonstre que Pablo, apesar de não ter o enunciado completo, pode determinar com certeza a solução do problema.

## SEGUNDO DIA

### PROBLEMA 4

Seja $M = \{1, 2, \ldots, 49\}$ o conjunto dos primeiros 49 inteiros positivos. Determine o maior inteiro $k$ tal que o conjunto $M$ tenha um subconjunto de $k$ elementos em que não haja 6 números consecutivos. Para esse valor máximo de $k$, encontre a quantidade de subconjuntos de $m$, de $k$ elementos, que tenham a propriedade mencionada.

### PROBLEMA 5

No quadrado $ABCD$, sejam $P$ e $Q$ pontos pertencentes aos lados $BC$ e $CD$ respectivamente, distintos dos extremos, tais que $BP = CQ$. Consideram-se pontos $X$ e $Y$, $X \neq Y$, pertencentes aos segmentos $AP$ e $AQ$ respectivamente. Demonstre que, quaisquer que sejam $X$ e $Y$, existe um triângulo cujos lados têm os comprimentos dos segmentos $BX$, $XY$ e $DY$.

### PROBLEMA 6

Definem-se as sucessões $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}$ por:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 4 \quad \text{e}$$

$$a_{n+1} = a_n^{2001} + b_n, \quad b_{n+1} = b_n^{2001} + a_n \quad \text{para } n \geq 0.$$

Demonstre que 2003 não divide nenhum dos termos destas sucessões.