XXIX Olimpíada Iberoamericana de Matemática

DIA 1

San Pedro Sula, Honduras, 23 de setembro de 2014

Problema 1.
Para cada inteiro positivo n, define-se $s(n)$ como a soma dos dígitos de n. Determine o menor inteiro positivo k tal que

$$s(k) = s(2k) = s(3k) = \cdots = s(2013k) = s(2014k).$$

Problema 2.
Ache todos os polinômios $P(x)$ com coeficientes reais tais que $P(2014) = 1$ e, para algum inteiro c, se tem

$$xP(x - c) = (x - 2014)P(x).$$

Problema 3.
Sobre uma circunferência marcam-se 2014 pontos. Sobre cada um dos segmentos cujos extremos são dois dos 2014 pontos escreve-se um número real não negativo. Sabe-se que, para qualquer polígono convexo cujos vértices são alguns dos 2014 pontos, a soma dos números escritos nos seus lados é menor ou igual a 1. Determine o maior valor possível para a soma de todos os números escritos.

Duração da prova: 4 horas e meia.
Valor de cada problema: 7 pontos.

XXIX Olimpíada Iberoamericana de Matemática

DIA 2

San Pedro Sula, Honduras, 24 de setembro de 2014

Problema 4.

Tem-se N moedas, das quais $N-1$ são autênticas de igual peso e uma é falsa, de peso diferente das demais. O objetivo é, utilizando exclusivamente uma balança de dois pratos, achar a moeda falsa e determinar se é mais pesada ou mais leve que as autênticas. Em cada vez que se possa deduzir que uma ou várias moedas são autênticas, todas estas moedas são imediatamente separadas e não podem ser usadas nas pesagens seguintes. Determine todos os N para os quais se pode garantir que o objetivo seja atingido. (Podem-se fazer tantas pesagens quantas se deseje).

Problema 5.

Seja ABC um triângulo acutângulo e H o ponto de interseção de suas alturas. A altura relativa ao vértice A corta BC em D. Sejam M e N os pontos médios de BH e CH, respectivamente. DM e DN intersectam AB e AC em X e Y, respectivamente. Se XY intersecta BH em P e CH em Q, demonstre que $H,\ P,\ D$ e Q estão numa mesma circunferência.

Problema 6.

Dado um conjunto X e uma função $f : X \to X$, denotamos, para cada $x \in X$, $f^1(x) = f(x)$ e, para cada $j \geq 1$, $f^{j+1}(x) = f(f^j(x))$. Dizemos que $a \in X$ é um ponto fixo de f se $f(a) = a$.
Para cada número real x, definimos $\pi(x)$ como o número de primos positivos menores ou iguais a x.
Dado um número inteiro positivo n, dizemos que $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ é *catracha* se $f^{f(k)}(k) = k$ para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.
Prove que:

a) Se f é catracha, então f tem pelo menos $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ pontos fixos.

b) Se $n \geq 36$, então existe uma função catracha com exatamente $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ pontos fixos.

Duração da prova: 4 horas e meia.
Valor de cada problema: 7 pontos.