XV IMC
Blagoevgrad, Bulgária
Primeiro dia, 27 de julho de 2008

Duração da prova: 5 horas

PROBLEMA 1

Achar todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x)-f(y)$ é racional sempre que $x-y$ é racional.

PROBLEMA 2

Seja $P : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ um funcional linear tal que

$$P(f \cdot g) = 0 \Longrightarrow P(f) \cdot P(g) = 0.$$

Prove que existem reais c, x_0 para os quais

$$P(f) = c \cdot f(x_0),\ \forall f \in \mathbb{R}[X].$$

PROBLEMA 3

Sejam $p \in \mathbb{Z}[X]$ e $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ inteiros.

(a) Prove que existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $p(a)$ é múltiplo de $p(a_i)$, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.

(b) Prove ou disprove a seguinte afirmação: para quaisquer $p \in \mathbb{Z}[X]$ e inteiros $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $p(a)$ é múltiplo de $p(a_1)p(a_2)\cdots p(a_k)$.

PROBLEMA 4

Dizemos que uma tripla (a_1, a_2, a_3) de reais não-negativos é *melhor* do que outra tripla (b_1, b_2, b_3) se duas das três desigualdades abaixo ocorrem:

$$a_1 > b_1,\ a_2 > b_2,\ a_3 > b_3.$$

Dizemos que uma tripla (x, y, z) de reais não-negativos é *especial* se $x + y + z = 1$. Ache todos os naturais n para os quais existe um conjunto S de n triplas especiais tal que, para **qualquer** tripla especial (x, y, z), existe uma tripla em S melhor do que (x, y, z).

PROBLEMA 5

Existe um grupo finito G que possui um subgrupo normal H para o qual $|\mathrm{Aut}H| > |\mathrm{Aut}G|$?

Observação. $|\mathrm{Aut}H|$ denota a quantidade de automorfismos do grupo H e H é um subgrupo normal de G se $gHg^{-1} = H$, $\forall g \in G$.

PROBLEMA 6

Para cada permutação $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ de $(1, 2, \ldots, n)$, defina

$$D(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} |i_k - k|.$$

Seja $Q(n, d)$ a quantidade de permutações σ de $(1, 2, \ldots, n)$ tais que $D(\sigma) = d$. Prove que se $d \geq 2n$, então $Q(n, d)$ é par.

XV IMC
Blagoevgrad, Bulgária
Segundo dia, 28 de julho de 2008

Duração da prova: 5 horas

PROBLEMA 1

Sejam k, n inteiros positivos tais que o polinômio $x^{2k} - x^k + 1$ divide $x^{2n} + x^n + 1$. Prove que $x^{2k} + x^k + 1$ divide $x^{2n} + x^n + 1$.

PROBLEMA 2

Duas elipses distintas são dadas. Sabe-se que um dos focos da primeira elipse coincide com um dos focos da segunda. Prove que as elipses se intersectam em no máximo dois pontos.

PROBLEMA 3

Prove que, para todo inteiro positivo n, 2^{n-1} divide

$$\sum_{0 \le k \le n/2} \binom{n}{2k+1} \cdot 5^k.$$

PROBLEMA 4

Sejam $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ polinômios não-constantes tais que g divide f em $\mathbb{Z}[X]$. Prove que se o polinômio $f - 2008$ tem pelo menos 81 raízes distintas, então o grau de g é maior do que 5.

PROBLEMA 5

Sejam n um inteiro positivo e $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ uma matriz tal que

$$\begin{array}{rcll} a_{ij} & = & 1 & , \quad \text{se } i+j \text{ é primo} \\ & & 0 & , \quad \text{caso contrário.} \end{array}$$

Prove que $|\det A| = k^2$ para algum inteiro k.

PROBLEMA 6

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert (sobre $\mathbb{R}$) de dimensão infinita. Sejam também $d > 0$ e S um subconjunto de $\mathcal{H}$ (não necessariamente enumerável) tal que a distância entre quaisquer dois pontos de S é igual a d. Mostre que existe $y \in \mathcal{H}$ para o qual

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{d}(x-y) \,|\, x \in S \right\}$$

forma um conjunto ortonormal de $\mathcal{H}$.

Observação. Um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial real dotado de um produto interno para o qual o espaço métrico induzido pelo produto interno é completo.