XLIV OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

07 a 19 de julho de 2003, Tóquio - Japão

PRIMEIRO DIA

DURAÇÃO: 4 horas e meia.

PROBLEMA 1

Seja A um subconjunto do conjunto $S=\{1,2,\ldots,1000000\}$ com exactamente 101 elementos. Demonstre que existem números $t_1,t_2,\ldots,t_{100}$ em S tais que os conjuntos

$$A_j=\{x+t_j \mid x\in A\}, \qquad \text{para} \qquad j=1,2,\ldots,100,$$

são disjuntos dois a dois.

PROBLEMA 2

Determine todos os pares de inteiros positivos (a,b) tais que

$$\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$$

é um inteiro positivo.

PROBLEMA 3

Considere um hexágono convexo tal que para cada quaisquer dois lados opostos verifica-se a seguinte propriedade: a distância entre os seus pontos médios é igual a $\sqrt{3}/2$ vezes a soma dos seus comprimentos. Demonstre que todos os ângulos do hexágono são iguais.

(Um hexágono convexo $ABCDEF$ tem três pares de lados opostos: AB e DE, BC e EF, CD e FA).

XLIV OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

07 a 19 de julho, Tóquio - Japão

SEGUNDO DIA

DURAÇÃO: 4 horas e meia.

PROBLEMA 4

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo cujos vértices estão sobre uma circunferência. Sejam P, Q e R os pés das perpendiculares às rectas BC, CA e AB, respectivamente, passando por D. Demonstre que $PQ = QR$ se e só se as bissetrizes dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle ADC$ se intersectam sobre a recta AC.

PROBLEMA 5

Sejam n um inteiro positivo e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais tais que $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$.

(a) Demonstre que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| x_i - x_j \right| \right)^2 \le \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

(b) Demonstre que a igualdade é válida se e só se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formam uma progressão aritmética.

PROBLEMA 6

Seja p um número primo. Demonstre que existe um número primo q tal que, para todo o inteiro n, o número $n^p - p$ não é divisível por q.