

Segunda, 18 de julho de 2011

Problema 1. Para qualquer conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de quatro inteiros positivos distintos, a soma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ é denotada por s_A . Seja n_A o número de pares de índices (i, j) , com $1 \leq i < j \leq 4$, para os quais $a_i + a_j$ divide s_A .

Encontre todos os conjuntos A de quatro inteiros positivos distintos para os quais n_A alcança o seu valor máximo.

Problema 2. Seja \mathcal{S} um conjunto finito de dois ou mais pontos do plano. Em \mathcal{S} não há três pontos colineares. Um *moinho de vento* é um processo que começa com uma reta ℓ que passa por um único ponto $P \in \mathcal{S}$. Roda-se ℓ no sentido dos ponteiros do relógio ao redor do *pivot* P até que a reta encontre pela primeira vez um outro ponto de \mathcal{S} , que denotaremos por Q . Com Q como novo *pivot*, a reta continua a rodar no sentido dos ponteiros do relógio até encontrar outro ponto de \mathcal{S} . Este processo continua sem parar, sendo sempre o *pivot* algum ponto de \mathcal{S} .

Demonstre que se pode escolher um ponto $P \in \mathcal{S}$ e uma reta ℓ que passa por P tais que o moinho de vento resultante usa cada ponto de \mathcal{S} como *pivot* infinitas vezes.

Problema 3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real definida no conjunto dos números reais que satisfaz

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

para quaisquer números reais x e y .

Demonstre que $f(x) = 0$ para todo $x \leq 0$.