Terça, 19 de julho de 2011

Problema 4. Seja n um inteiro positivo. Temos uma balança de dois pratos e n pesos cujas massas são 2^0, $2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Devemos colocar os pesos na balança, um por um, de tal forma que o prato direito nunca seja mais pesado do que o prato esquerdo. A cada passo, devemos escolher um dos pesos que ainda não estejam na balança e colocá-lo sobre o prato esquerdo ou sobre o prato direito, procedendo assim até que todos os pesos tenham sido colocados nela.
Determine o número de maneiras em que isso pode ser feito.

Problema 5. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}^*$ uma função do conjunto dos inteiros para o conjunto dos inteiros positivos. Supomos que para quaisquer inteiros m e n, a diferença $f(m) - f(n)$ é divisível por $f(m-n)$.
Demonstre que, para todos os inteiros m e n com $f(m) \leq f(n)$, o número $f(n)$ é divisível por $f(m)$.

Problema 6. Seja ABC um triângulo acutângulo cuja circunferência circunscrita é Γ. Seja ℓ uma reta tangente a Γ e sejam ℓ_a, ℓ_b e ℓ_c as retas obtidas ao refletir ℓ em relação às retas BC, CA e AB, respectivamente.
Demonstre que a circunferência circunscrita ao triângulo determinado pelas retas ℓ_a, ℓ_b e ℓ_c é tangente à circunferência Γ.