X OLIMPÍADA DE MAIO

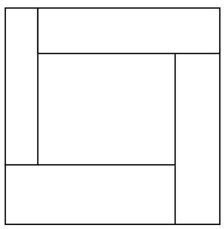
PRIMEIRO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

Xavier multiplica quatro dígitos, não necessariamente distintos, e obtém um número terminado em 7. Determine quanto pode valer a soma dos quatros dígitos multiplicados por Xavier. Dê todas as possibilidades.

PROBLEMA 2



No interior de um quadrado de 11×11, Pablo desenhou um retângulo e prolongando seus lados dividiu o quadrado em 5 retângulos, como mostra a figura.
Sofia fez o mesmo, conseguindo, além disso, que os comprimentos dos lados dos 5 retângulos fossem números inteiros entre 1 e 10, todos distintos.
Mostre uma figura como a que Sofia fez.

PROBLEMA 3

Em cada casa de um tabuleiro de 5×5 está escrito 1 ou -1. Em cada passo troca-se o número de cada uma das 25 casas pelo resultado da multiplicação dos números de todas as suas casas vizinhas.
Inicialmente se tem o tabuleiro da figura.
Mostre como fica o tabuleiro ao final de 2004 passos.

1	1	–1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Observação: Duas casas são vizinhas se tiverem um lado em comum.

PROBLEMA 4

Em um quadrado *ABCD* de diagonais *AC* e *BD*, chamamos de *O* o centro do quadrado. Constrói-se um quadrado *PQRS* de lados paralelos aos de *ABCD* com *P* no segmento *AO*, *Q* no segmento *BO*, *R* no segmento *CO*, *S* no segmento *DO*.
Se área (*ABCD*) = 2área(*PQRS*) e *M* é o ponto médio do lado *AB*, calcule a medida do ângulo $A\widehat{M}P$. (Não vale medir)

PROBLEMA 5

Tem-se 90 cartões e em cada um estão escritos dois dígitos distintos: 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 12, e assim sucessivamente até 98.
Um conjunto de cartões é *correto* se não contém nenhum cartão que tenha o primeiro dígito igual ao segundo dígito de outro cartão do conjunto.
Chamamos *valor* de um conjunto de cartões a soma dos números escritos em cada cartão.
Por exemplo, os quatros cartões 04, 35, 78 e 98 formam um conjunto correto e seu valor é 215, pois 04 + 35 + 78 + 98 = 215.
Encontre um conjunto correto que tenha o maior valor possível. Explique por que é impossível obter um conjunto correto de maior valor.

X OLIMPÍADA DE MAIO
SEGUNDO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

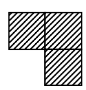
PROBLEMA 1
Juliano escreveu cinco números inteiros positivos, não necessariamente distintos, tais que seu produto seja igual a sua soma. Quais podem ser os números que Juliano escreveu?

PROBLEMA 2
A mãe de Zezinho quer preparar n pacotes de 3 balas para dar de presente na festa de aniversário, e para isto comprará balas sortidas de 3 sabores diferentes. Ela pode comprar qualquer número de balas, mas não pode escolher quantas são de cada sabor. Ela quer colocar em cada pacote uma bala de cada sabor, e se isto não for possível usará somente balas de um sabor e todos os pacotes terão 3 balas desse sabor. Determine o menor número de balas que ela deve comprar para poder preparar os n pacotes. Explique por que se ela compra menos balas não terá a certeza de poder preparar os pacotes como ela quer.

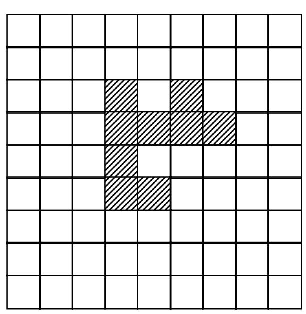
PROBLEMA 3
Temos uma mesa de bilhar de 8 metros de comprimento e 2 metros de largura, com uma única bola no centro. Lançamos a bola em linha reta e, depois de percorrer 29 metros, ela pára numa esquina da mesa. Quantas vezes a bola rebateu nas bordas da mesa?
Nota: Quando a bola rebate na borda da mesa, os dois ângulos que formam sua trajetória com a borda da mesa são iguais.

PROBLEMA 4
Ache todos os números naturais x, y, z que verificam simultaneamente
$$x \cdot y \cdot z = 4104 \qquad x + y + z = 77$$

PROBLEMA 5
Sobre um tabuleiro de 9×9, dividido em casas de 1×1, se colocam sem superposições e sem sair do tabuleiro, peças da forma



Cada peça cobre exatamente 3 casas.
a) A partir do tabuleiro vazio, qual é a máxima quantidade de peças que se pode colocar?
b) A partir do tabuleiro com 3 peças e colocadas como mostra o diagrama seguinte,



qual é a máxima quantidade de peças que se pode colocar?