XI OLIMPÍADA DE MAIO
PRIMEIRO NÍVEL

14 de Maio de 2005

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

Num quadro negro havia seis figuras: um círculo, um triângulo, um quadrado, um trapézio, um pentágono e um hexágono, pintados de seis cores: azul, branco, vermelho, amarelo, verde e marrom. Cada figura tinha somente uma cor e todas as figuras eram de cores diferentes.
No dia seguinte perguntou-se qual era a cor de cada figura.
Pablo respondeu: "O círculo era vermelho, o triângulo era azul, o quadrado era branco, o trapézio era verde, o pentágono era marrom e o hexágono era amarelo."
Sofia respondeu: "O círculo era amarelo, o triângulo era verde, o quadrado era vermelho, o trapézio era azul, o pentágono era marrom e o hexágono era branco."
Pablo errou três vezes e Sofia duas vezes, e sabe-se que o pentágono era marrom.
Determine se é possível saber com certeza qual era a cor de cada uma das figuras.

PROBLEMA 2

Um número inteiro chama-se *autodivi* se é divisível pelo número de dois algarismos formado por seus dois últimos dígitos (dezenas e unidades). Por exemplo, 78013 é autodivi pois é divisível por 13, 8517 é autodivi pois é divisível por 17.
Encontre 6 números inteiros consecutivos que sejam autodivi e que tenham os dígitos das unidades, das dezenas e das centenas distintos de 0.

PROBLEMA 3

Um segmento AB de largura 100 está dividido em 100 segmentos menores de largura 1 mediante 99 pontos intermediários.
Ao extremo A designa-se o 0 e ao extremo B, o 1.
Gustavo designa a cada um dos 99 pontos intermediários um 0 ou um 1, a sua escolha, e logo pinta cada segmento de largura 1 de azul ou de vermelho, respeitando a seguinte regra:
São vermelhos todos os segmentos que têm o mesmo número em seus extremos e são azuis os segmentos que têm números diferentes em seus extremos.
Determine se Gustavo pode designar os 0's e os 1's de modo a obter exatamente 30 segmentos azuis. E 35 segmentos azuis? (Em cada caso, se a resposta é sim, mostre uma distribuição dos 0's e dos 1's, e se a resposta é não, explique o porquê.)

PROBLEMA 4

Há duas figuras de papel: um triângulo equilátero e um retângulo. A altura do retângulo é igual à altura do triângulo e a base do retângulo é igual à base do triângulo. Divida o triângulo em três partes e o retângulo em duas, mediante cortes retos, de modo que com os cinco pedaços possamos montar, sem buracos nem superposições, um triângulo equilátero. Para montar a figura, cada parte pode ser girada e/ou dar a volta. (Justifique que o triângulo montado é equilátero.)

PROBLEMA 5

a) Em cada casa de um tabuleiro 7×7 se escreve um dos números: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7 de forma que cada número esteja escrito em sete casas distintas. Será possível que em nenhuma fila e em nenhuma coluna fiquem escritos números consecutivos?
b) Em cada casa de um tabuleiro 5×5 se escreve um dos números: 1, 2, 3, 4 ou 5 de forma que cada número esteja escrito em cinco casas distintas. Será possível que em nenhuma fila e nenhuma coluna fiquem escritos números consecutivos?

XI OLIMPÍADA DE MAIO

SEGUNDO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

14 de Maio de 2005

PROBLEMA 1

Determine o menor número de três dígitos que seja o produto de dois números de dois dígitos, de forma que os sete dígitos destes três números sejam todos diferentes.

PROBLEMA 2

Gonçalo escreve num quadro negro quatro números escolhidos entre 0, 1, 2, 3 ou 4. Pode repetir números. Nicolás realiza repetidas vezes a seguinte operação: troca um dos números, a sua escolha, pelo resto da divisão por 5 do produto de outros dois números do quadro negro, a sua escolha.

O objetivo de Nicolás é conseguir que os quatro números sejam iguais. Determine se Gonçalo pode escolher os números iniciais de forma que seja impossível a Nicolás alcançar seu objetivo.

PROBLEMA 3

No triângulo isósceles ABC, com $AB = AC$, seja M o ponto médio de BC. O Ponto D no lado BC é tal que $B\hat{A}D = \frac{1}{6} B\hat{A}C$. A reta perpendicular a AD por C corta a AD em N de modo que $DN = DM$. Calcule os ângulos do triângulo ABC.

PROBLEMA 4

Num baile há 12 homens, numerados de 1 a 12 e 12 mulheres, numeradas de 1 a 12. A cada homem se designa um "amigo oculto" entre os outros 11. Todos dançaram todas as músicas. Na primeira música cada homem dançou com a mulher que tem seu mesmo número. A partir daí, cada homem dançou uma nova música com uma mulher que havia dançado a música anterior com seu amigo oculto.

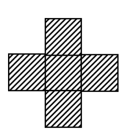
Na terceira música os casais foram:

Homens	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Mulheres	5	11	2	12	8	10	9	4	6	3	7	1

Encontre o número do amigo oculto de cada homem.

PROBLEMA 5

Sobre o tabuleiro 9×9 aterrissou a nave inimiga que cobre exatamente 5 casas do tabuleiro, assim:



A nave é invisível.

Cada míssil defensivo cobre exatamente uma casa, e destrói a nave se bater numa das 5 casas que esta ocupa.

Determine o número mínimo de mísseis que são necessários para destruir com certeza a nave inimiga.