XII OLIMPÍADA DE MAIO

PRIMEIRO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
<u>Justifique cada uma das respostas</u>
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

Um calendário digital exibe a data: dia, mês e ano, com 2 dígitos para o dia, 2 dígitos para o mês e 2 dígitos para o ano. Por exemplo, 01-01-01 corresponde a primeiro de janeiro de 2001 e 25-05-23 corresponde a 25 de maio de 2023. Em frente ao calendário há um espelho. Os dígitos do calendário são como os da figura abaixo:

Se 0, 1, 2, 5 e 8 se refletem, respectivamente, em 0, 1, 5, 2 e 8, e os outros dígitos perdem sentido ao se refletirem, determine quantos dias do século, ao se refletirem no espelho, correspondem também a uma data.

PROBLEMA 2

Um retângulo de papel de 3cm $\times$ 9cm é dobrado ao longo de uma reta, fazendo coincidir dois vértices opostos. Deste modo se forma um pentágono. Calcular sua área.

PROBLEMA 3

Há 20 pontos alinhados, separados por uma mesma distância:

● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

Miguel tem que pintar de vermelho três ou mais destes pontos, de maneira que os pontos vermelhos estejam separados por uma mesma distância e seja impossível pintar de vermelho exatamente um ponto a mais sem desobedecer a condição anterior. Determinar de quantas maneiras Miguel poderá fazer a tarefa.

PROBLEMA 4

Com 150 cubinhos brancos de $1 \times 1 \times 1$ arma-se um paralelepípedo de $6 \times 5 \times 5$, pintam-se as seis faces de azul e logo se desarma o paralelepípedo. Lucrecia deve armar um novo paralelepípedo, sem buracos, usando exclusivamente cubinhos que tenham ao menos uma face azul e de modo que as faces do paralelepípedo de Lucrecia sejam todas completamente azuis.
Determinar as dimensões do paralelepípedo de maior volume que Lucrecia pode armar.

PROBLEMA 5

Em algumas casas de um tabuleiro 10×10 coloca-se uma ficha de maneira que se verifique a seguinte propriedade:
Para cada casa que tem uma ficha, a quantidade de fichas colocadas em sua mesma linha deve ser maior ou igual que a quantidade de fichas colocadas em sua mesma coluna.
Quantas fichas pode haver no tabuleiro?
Diga todas as possibilidades.

XII OLIMPÍADA DE MAIO
SEGUNDO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

Determinar todos os pares de números naturais a e b tais que $\frac{a+1}{b}$ e $\frac{b+1}{a}$ são números naturais.

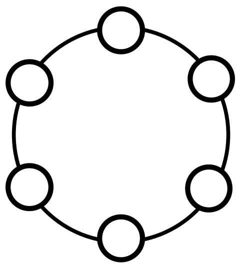
PROBLEMA 2

No quadro negro estão escritos vários números primos (alguns deles repetidos). Mauro somou os números do quadro negro e Fernando multiplicou os números do quadro negro. O resultado que obteve Fernando é igual a 40 vezes o resultado que obteve Mauro. Determinar quais podem ser os números do quadro negro.
Diga todas as possibilidades.

PROBLEMA 3

Escrever um número inteiro positivo em cada casa de modo que:

- Os seis números sejam distintos.
- A soma dos seis números seja 100.
- Se cada número é multiplicado pelo seu vizinho (no sentido dos ponteiros do relógio) e se somam os seis resultados das seis multiplicações, obtém-se o menor valor possível.



Explicar por que não é possível obter um valor menor.

PROBLEMA 4

Seja $ABCD$ um trapézio de bases AB e CD. Seja O o ponto de interseção de suas diagonais AC e BD. Se a área do triângulo ABC é 150 e a área do triângulo ACD é 120, calcular a área do triângulo BCO.

PROBLEMA 5

Com 28 pontos forma-se uma "grade triangular" de lados iguais, como se mostra na figura abaixo.
Uma operação consiste em escolher três pontos que sejam os vértices de um triângulo equilátero e retirar estes três pontos da grade. Se após realizar várias destas operações resta somente um ponto, em quais posições pode ficar esse ponto?
Determinar todas as possibilidades e indicar em cada caso as operações realizadas.
Justificar por que o ponto que restou não pode estar numa outra posição.