XIV OLIMPÍADA DE MAIO

PRIMEIRO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

Quantos números distintos de 6 algarismos e múltiplos de 45 podem ser escritos colocando um dígito à esquerda e outro à direita de 2008?

PROBLEMA 2

No colégio Olímpico as provas são avaliadas com números inteiros, a menor nota possível é 0, e a maior é 10. Na aula de Matemática o professor aplica as provas. Este ano a turma tem 15 alunos. Quando um dos alunos tira na primeira prova uma nota menor que 3 e na segunda prova uma nota maior que 7, o aluno é chamado de ***aluno superado***. O professor, ao terminar de corrigir as provas, fez uma média com as 30 notas e obteve 8. Qual é a maior quantidade de alunos superados que pode ter tido a turma?

PROBLEMA 3

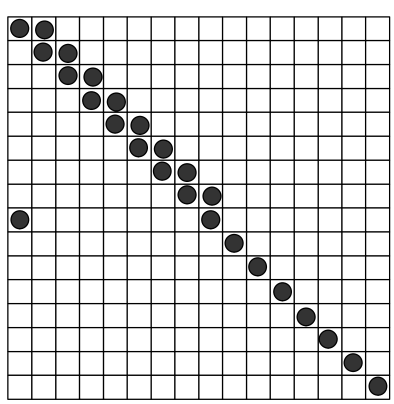
Num quadro negro estão escritos os números inteiros de 1 a 2008 inclusive. Apagam-se dois números e escreve-se a diferença entre eles. Por exemplo, se apagamos o número 5 e 241, escrevemos 236. Assim continuamos, apagando os números e escrevendo a diferença, até que fica somente um número. Determine se o número que ficou por último pode ser 2008. E 2007?
Em cada caso, se a resposta é afirmativa indique uma seqüência com esse número final, e se é negativa, explique o porquê.

PROBLEMA 4

Sobre o lado AB de um quadrado $ABCD$ é desenhado exteriormente o triângulo retângulo ABF, de hipotenusa AB. Sabe-se que $AF = 6$, e que $BF = 8$. Chamamos de E o centro do quadrado. Calcule o comprimento de EF.

PROBLEMA 5

Num tabuleiro de 16×16 colocamos 25 moedas, como na figura abaixo. É permitido selecionar 8 linhas e 8 colunas e retirar do tabuleiro todas as moedas que se encontram nessas linhas e colunas. Determine se é possível retirar todas as moedas do tabuleiro.
Se a resposta é afirmativa, indique as 8 linhas e as 8 colunas selecionadas, e se é negativa, explique o porquê.



XIV OLIMPÍADA DE MAIO

SEGUNDO NÍVEL

Olimpíada de Mayo

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
<u>Justifique cada uma das respostas</u>
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

Num quadro negro está escrita a seguinte expressão:

$$1-2-2^2-2^3-2^4-2^5-2^6-2^7-2^8-2^9-2^{10}.$$

Juan distribui parêntesis de distintas maneiras e efetua o cálculo que fica. Por exemplo:

$1-2-(2^2-2^3)-2^4-(2^5-2^6-2^7)-2^8-(2^9-2^{10})=403$ ou

$1-(2-2^2(-2^3-2^4)-(2^5-2^6-2^7))-(2^8-2^9)-2^{10}=-933.$

Quantos resultados diferentes pode obter Juan?

PROBLEMA 2

No retângulo *ABCD* de lados *AB*, *BC*, *CD* e *DA*, seja *P* um ponto do lado *AD* tal que $B\hat{P}C=90°$. A perpendicular a *BP* traçada por *A* corta *BP* em *M* e a perpendicular a *CP* traçada por *D* corta *CP* em *N*.

Demonstre que o centro do retângulo está no segmento *MN*.

PROBLEMA 3

Nos números 1010...101 estão alternados *uns* e *zeros*; se há n uns, há $n-1$ zeros $(n\geq 2)$.

Determine os valores de n para os quais o número 1010...101, que tem n uns, é primo.

PROBLEMA 4

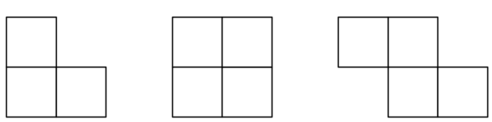
No plano há 16 retas tais que não há duas paralelas nem três concorrentes. Sebastián tem que pintar os 120 pontos que são interseção de duas retas de modo que em cada reta todos os pontos pintados sejam de cor diferente.

Determine o número mínimo de cores que Sebastián precisa para concluir a tarefa.

E se as retas são 15 (neste caso, os pontos são 105)?

PROBLEMA 5

Matias cobriu um tabuleiro quadrado de 7×7, dividido em casas de 1×1, com peças dos três tipos a seguir



Tipo 1 **Tipo 2** **Tipo 3**

sem buracos nem superposições, e sem sair do tabuleiro.

Cada peça do tipo 1 cobre exatamente 3 casas e cada peça do tipo 2 ou do tipo 3 cobre exatamente 4 casas.

Determine a quantidade de peças do tipo 1 que Matias pode ter utilizado.

(As peças podem girar e ser viradas).