XV OLIMPÍADA DE MAIO

PRIMEIRO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

A cada número natural de dois algarismos associamos um dígito da seguinte forma: Multiplicam-se seus algarismos. Se o resultado é um dígito, este é o dígito associado. Se o resultado é um número de dois dígitos, multiplicam-se estes dois algarismos, e se o resultado é um dígito, este é o dígito associado. Caso contrario, repetimos a operação. Por exemplo, o dígito associado a 32 é o 6 pois $3 \cdot 2 = 6$; o dígito associado a 93 é o 4 pois $9 \cdot 3 = 27$, $2 \cdot 7 = 14$, $1 \cdot 4 = 4$.
Encontre todos os números de dois algarismos aos que se associa o dígito 8.

PROBLEMA 2

Encontre números primos p, q, r para os quais $p + q^2 + r^3 = 200$. Diga todas as possibilidades.
Obs: Lembre-se que o número 1 não é primo.

PROBLEMA 3

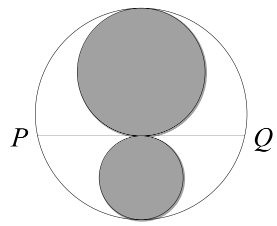
Temos 26 cartões e cada um tem escrito um número. Há dois com o número 1, dois com o número 2, dois com o 3, e assim por diante até dois com o 12 e dois com o 13. Deve-se distribuir os 26 cartões em pilhas de maneira que sejam cumpridas as duas condições a seguir:

- Se dois cartões têm o mesmo número estão na mesma pilha.
- Nenhuma pilha contém um cartão cujo número é igual à soma dos números de dois cartões dessa mesma pilha.

Determine qual é o número mínimo de pilhas que temos que formar. Dê um exemplo com a distribuição dos cartões para esse número de pilhas e justifique por quê é impossível ter menos pilhas.

PROBLEMA 4

Três circunferências são tangentes entre si, tal como mostramos na figura.
A região do círculo exterior que não está coberta pelos dois círculos interiores tem área igual a 2π.
Determine o comprimento do segmento PQ.



PROBLEMA 5

Pelas linhas de um tabuleiro quadriculado formado por 55 linhas horizontais e 45 linhas verticais caminha uma formiga. Queremos pintar alguns trechos de linhas para que a formiga possa ir de qualquer cruzamento até outro cruzamento qualquer, caminhando exclusivamente pelos trechos pintados. Se a distância entre linhas consecutivas é de 10 cm, qual é a menor quantidade possível de centímetros que deverão ser pintados?

XV OLIMPÍADA DE MAIO

SEGUNDO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1
Inicialmente no quadro está escrito o número 1. Em cada passo, apaga-se o número do quadro e se escreve outro, que é obtido aplicando quaisquer uma das seguintes operações:

- Operação A: Multiplicar o número escrito no quadro por $\frac{1}{2}$.
- Operação B: Diminuir 1 do número escrito no quadro.

Por exemplo, se no quadro está escrito o número $\frac{3}{8}$ podemos substituí-lo por $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$ ou por $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

Encontre uma sequência de passos ao fim dos quais o número do quadro seja $\frac{2009}{2^{2009}}$.

PROBLEMA 2
Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que o triângulo ABD é equilátero e o triângulo BCD é isósceles, com $\widehat{C} = 90^\circ$. Se E é o ponto médio do lado AD, determine a medida do ângulo $C\widehat{E}D$.

PROBLEMA 3
Na seguinte soma: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6, se suprimirmos os dois primeiros sinais de "+" obtemos a nova soma 123 + 4 + 5 + 6 = 138. Suprimindo três sinais de "+" podemos obter 1 + 23 + 456 = 480.
Consideremos agora a soma 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13, na qual serão suprimidos alguns sinais de "+". Quais são os três menores múltiplos de 100 que podemos obter desta forma?

PROBLEMA 4
Cada casa de um tabuleiro 5 × 5 é pintada de vermelho ou de azul, de tal forma que seja cumprida a seguinte condição: "Para quaisquer duas filas e duas colunas, das 4 casas que estão em suas interseções, há 4, 2 ou 0 pintadas de vermelho." De quantas formas podemos pintar o tabuleiro?

PROBLEMA 5
Um jogo de paciência se inicia com 25 cartas em fila. Algumas estão viradas para cima, e outras viradas para baixo.
Em cada movimento devemos escolher uma carta que esteja virada para cima, retirá-la e virar as cartas vizinhas à que foi retirada (se houver).
Ganha-se o jogo de paciência quando conseguimos, repetindo este movimento, retirar as 25 cartas da mesa.
Se inicialmente há n cartas viradas para cima, encontre todos os valores de n para os quais se pode ganhar o jogo.
Explique a estratégia vencedora, independentemente da localização inicial das cartas viradas para cima, e justifique por quê é impossível ganhar para os outros valores de n.
Duas cartas são vizinhas quando uma está imediatamente ao lado de outra, à direita ou à esquerda.
Por exemplo: a carta marcada com A tem duas cartas vizinhas e a marcada com B apenas uma. Depois de retirar uma carta fica um espaço, de modo que a marcada com C tem unicamente uma carta vizinha, e a marcada com D não tem nenhuma.