XVI OLIMPÍADA DE MAIO
PRIMEIRO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

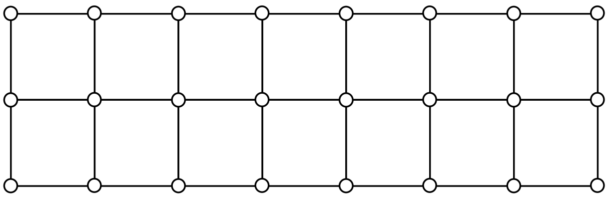
PROBLEMA 1
Um recipiente fechado com formato de paralelepípedo retangular contém 1 litro de água. Se o recipiente se apoia horizontalmente sobre três faces distintas, o nível da água é de 2cm, 4cm e 5cm.
Calcule o volume do paralelepípedo.

PROBLEMA 2
Na etapa 0 escrevem-se os números **1**, **1**.
Na etapa 1 intercala-se a soma dos números 1, **2**, 1.
Na etapa 2 entre cada par de números da etapa anterior intercala-se a soma deles: 1, **3**, 2, **3**, 1.
Uma etapa mais: 1, **4**, 3, **5**, 2, **5**, 3, **4**, 1.
Quantos números há na etapa 10?
Qual é a soma de todos os números que há na etapa 10?

PROBLEMA 3
É possível pintar os inteiros positivos com três cores de modo que, sempre que se somam dois números de cores distintas, o resultado da soma seja da terceira cor? (Há que usar as três cores.) Se a resposta é afirmativa, indique um possível modo de pintar; se não é possível, explique o porquê.

PROBLEMA 4
Encontre todos os números naturais de 90 dígitos que são múltiplos de 13 e têm os primeiros 43 dígitos iguais entre si e distintos de zero, os últimos 43 dígitos iguais entre si, e os 4 dígitos do meio são 2, 0, 1, 0, nessa ordem.

PROBLEMA 5
Num tabuleiro de 2×7 quadriculado em casas de 1×1 se consideram os 24 pontos que são vértices das casas. João e Matias jogam sobre este tabuleiro. João pinta de vermelho uma quantidade igual de pontos em cada uma das três linhas horizontais. Se Matias pode escolher três pontos vermelhos que sejam vértices de um triângulo acutângulo, Matias vence o jogo. Qual é a máxima quantidade de pontos que João pode pintar para ter certeza de que Matias não vencerá? (Para o número encontrado, dê um exemplo de pintura que impeça que Matias vença e justifique por quê Matias vence sempre se o número é maior.)



XVI OLIMPÍADA DE MAIO

SEGUNDO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

Determine o menor inteiro positivo que tenha todos seus dígitos iguais a 4, e que seja múltiplo de 169.

PROBLEMA 2

Consideramos o retângulo $ABCD$ e a circunferência de centro D e raio DA, que corta o prolongamento do lado AD no ponto P. A reta PC corta a circunferência no ponto Q e o prolongamento do lado AB no ponto R. Demonstre que $QB = BR$.

PROBLEMA 3

Encontre o menor $k > 2$ para o qual existem k números inteiros consecutivos, tais que a soma dos seus quadrados é um quadrado.

PROBLEMA 4

Seja n um inteiro tal que $1 < n < 2010$. Dado um polígono regular de 2010 lados e n moedas, devemos pintar os vértices do polígono utilizando n cores dadas, e logo colocar as n moedas em n vértices do polígono. Em seguida, a cada segundo, todas as moedas se deslocam para o vértice vizinho, girando no sentido dos ponteiros do relógio.
Determine os valores de n para os quais é possível pintar e escolher as posições iniciais das moedas, de forma que em todo momento as n moedas estejam todas em vértices de cores distintas.

PROBLEMA 5

Temos as seguintes peças: um retângulo de 4×1, dois retângulos de 3×1, três retângulos de 2×1 e quatro quadrados de 1×1. Ariel e Bernardo jogam o seguinte jogo num tabuleiro de $n \times n$, onde n é um número escolhido por Ariel. A cada movimento, Bernardo recebe de Ariel uma peça R. Em seguida Bernardo analisa se poderá colocar R no tabuleiro de modo que não tenha pontos em comum com nenhuma das peças colocadas anteriormente (nem sequer um vértice em comum). Se existe uma tal colocação para R, Bernardo deve escolher uma delas e colocar R. O jogo para se é impossível colocar R da forma explicada, e Bernardo vence. Ariel vence somente se estão colocadas as 10 peças no tabuleiro.

a) Suponhamos que Ariel dá as peças a Bernardo em ordem decrescente de tamanho. Qual é o menor n que garante a vitória do Ariel?
b) Para o n encontrado em a), se Bernardo recebe as peças em ordem crescente de tamanho. Ariel tem garantida a vitória?

ESCLARECIMENTO: cada peça deve cobrir exatamente um número de quadrados unitários do tabuleiro igual ao seu próprio tamanho. Os lados das peças podem coincidir com partes da borda do tabuleiro.