XVII OLIMPÍADA DE MAIO
PRIMEIRO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1
As quatro palavras codificadas

□*⊗ ⊕#● *□● ⊗♦⊕

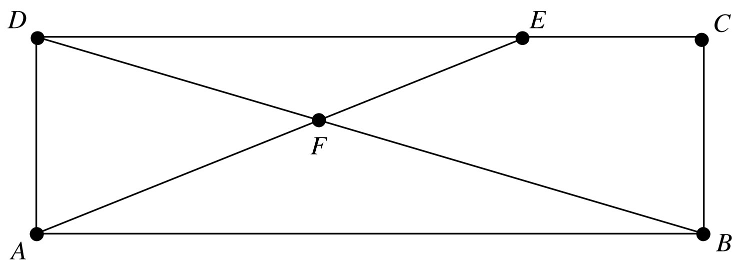
são em alguma ordem

AMO SUR REO MAS

Decifrar ⊗♦□*⊕#□●⊗.

PROBLEMA 2
Utilizando apenas uma vez cada um dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 se escrevem o quadrado e o cubo de um número inteiro positivo. Determine quanto pode valer este número.

PROBLEMA 3
No retângulo $ABCD$, $BC = 5$, $EC = \frac{1}{3}CD$ e F é o ponto onde se cortam AE e BD.
O triângulo DFE tem área 12 e o triângulo ABF tem área 27. Encontre a área do quadrilátero $BCEF$.



PROBLEMA 4
Utilizando vários cubinhos brancos de aresta 1, Guille monta um cubo grande. Em seguida, escolhe quatro faces do cubo grande e as pinta de vermelho. Finalmente desmonta o cubo grande e observa que os cubinhos com pelo menos uma face pintada de vermelho são 431. Encontre a quantidade de cubinhos que Guille utilizou para montar o cubo grande.

Analise todas as possibilidades.

PROBLEMA 5
Consideramos todos os números inteiros positivos de 14 dígitos, divisíveis por 18, cujos dígitos são exclusivamente 1 e 2, porém não há dígitos 2 consecutivos. Quantos destes números há?

XVII OLIMPÍADA DE MAIO

SEGUNDO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

Encontre um número inteiro positivo x tal que a soma dos dígitos de x seja maior que 2011 vezes a soma dos dígitos do número $3x$ (3 vezes x).

PROBLEMA 2

Dizemos que um número de quatro dígitos $abcd$ ($a \neq 0$) é *porá* se valem as seguintes condições:

$a \geq b$;

$ab - cd = cd - ba$.

por exemplo, 2011 é porá porque 20 – 11 = 11 – 02.

Encontre todos os números porá.

PROBLEMA 3

Num triângulo retângulo ABC tal que $AB = AC$, M é o ponto médio de BC. Seja P um ponto da mediatriz de AC que pertence ao semiplano determinado por BC que não contém A. As retas CP e AM se cortam em Q. Calcule o ângulo que formam AP e BQ.

PROBLEMA 4

Dados n pontos em uma circunferência se escreve ao lado de um deles um 1 e ao lado de cada um dos outros um 0. A operação permitida consiste em escolher um ponto que tenha um 1 e trocar o número desse ponto e também os números dos seus dois vizinhos, o da esquerda e o da direita (onde há 1 se escreve 0 e onde há 0 se escreve 1).

a) Se $n = 101$, mostre que se pode conseguir, mediante uma sucessão de operações permitidas, que cada um dos n pontos tenha escrito 0.

b) Se $n = 102$, mostre que é impossível obter todos 0.

PROBLEMA 5

Determine para quais números naturais n é possível cobrir completamente um tabuleiro de $n \times n$ dividido em casas de 1×1 com peças como a da figura, sem buracos nem superposições e sem sair do tabuleiro. Cada uma das peças cobre exatamente seis casas.

Nota: As peças podem girar.