Atlántida, segunda-feira 18 de agosto de 2014.-

Duração da prova: 3 horas e meia.
Versão em Português.
Cada problema vale 10 pontos.

Primeiro Dia

Problema 1

Em uma lousa, estão escritos os números inteiros de 1 a 2014, inclusive. A operação válida é escolher dois números *a* e *b*, apagar eles e no seu lugar escrever o mínimo múltiplo comum do par *(a,b)* e o máximo divisor comum do par *(a,b)*.

Mostre que, sem importar a quantidade de operações que sejam realizadas, a soma dos números que ficam escritos na lousa sempre é maior que $2014 \cdot \sqrt[2014]{2014!}$.

Problema 2

Um par de inteiros positivos (a,b) é chamado *charrúa* se existe um inteiro positivo *c* tal que $a+b+c$ e $a \cdot b \cdot c$ sejam ambos quadrados perfeitos; caso não exista tal número *c*, o par é chamado *não-charrúa*.

a) Mostre que existem infinitos pares não-charrúas.
b) Mostre que existem infinitos inteiros positivos *n* para os quais o par $(2,n)$ é charrúa.

Problema 3

Seja *ABCD* um retângulo, *P* um ponto exterior tal que o ângulo $B\hat{P}C = 90^{\circ}$ e a área do pentágono *ABPCD* é igual a AB^2.

Prove que é possível dividir o pentágono *ABPCD* em três pedaços através de cortes retos de tal modo que com esses pedaços se pode construir um quadrado sem buracos e sem superposição.

Observação: Os pedaços podem girar e podem ser virados.

25 OLIMPÍADA MATEMÁTICA DE PAÍSES DEL CONO SUR
URUGUAY 2014

Atlántida, terça-feira 19 de agosto de 2014.-

Duração da prova: 3 horas e meia.
Versão em Português.
Cada problema vale 10 pontos.

Segundo Dia

Problema 4

Mostre que o número $n^2 - 2^{2014} \cdot 2014n + 4^{2013}\left(2014^2 - 1\right)$, com *n* natural, não pode ser primo.

Problema 5

Seja *ABCD* um quadrilátero inscrito em uma circunferência de centro *O*. Este ponto *O* está no interior do quadrilátero de modo que os ângulos $B\hat{A}C = O\hat{D}A$ são iguais. As diagonais desse quadrilátero se cortam no ponto *E*. Por *E* são traçadas a reta *r* perpendicular a *BC* e a reta *s* perpendicular a *AD*. A reta *r* intersecta *AD* em *P* e a reta *s* intersecta *BC* em *M*. Seja *N* o ponto médio de *EO*.

Mostre que *M*, *N* e *P* são colineares.

Problema 6

Dada uma família *F* de subconjuntos de $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ ($n \geq 2$), a jogada permitida é escolher dois conjuntos **disjuntos** *A* e *B* de *F* e adicionar $A \cup B$ a *F* (sem excluir nem *A* nem *B*).

Inicialmente, *F* possui exatamente todos os subconjuntos que contém apenas um elemento de *S*. O objetivo é que, através de jogadas permitidas, *F* possua todos os subconjuntos de $n-1$ elementos de *S*.

Determine o menor número de jogadas necessárias para alcançar o objetivo.

Observação: $A \cup B$ é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a *A*, a *B* ou a ambos.