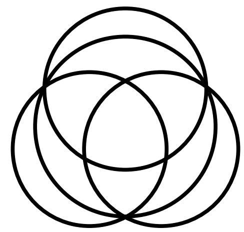
Primeiro dia
Mar del Plata, 16 de abril

Problema 1
Os quatro círculos da figura determinam 10 regiões limitadas. Nessas regiões são escritos 10 números inteiros positivos distintos cuja soma é 100, um número em cada região. A soma dos números contidos em cada círculo é igual a S (a mesma para os quatro círculos). Determine o maior e o menor valor possível de S.



Problema 2
Um *corchete* é composto por três segmentos de comprimento 1, que formam dois ângulos retos como mostra a figura.

É dado um quadrado de lado n dividido em n^2 quadradinhos de lado 1 por meio de retas paralelas aos seus lados. Corchetes são colocados sobre esse quadrado de modo que cada segmento de um corchete cubra um lado de algum quadradinho. Dois segmentos de corchete não podem ficar sobrepostos.
Determine todos os valores de n para os quais é possível cobrir os lados dos n^2 quadradinhos.

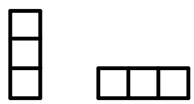
Problema 3
Sejam A, B e C três pontos tais que B é ponto médio do segmento AC e seja P um ponto tal que $\angle PBC = 60^\circ$. São construídos o triângulo equilátero PCQ tal que B e Q estão em semiplanos diferentes em relação a PC, e o triângulo equilátero APR tal que B e R estão no mesmo semiplano em relação a AP. Seja X o ponto de interseção das retas BQ e PC; seja Y o ponto de interseção das retas BR e AP. Demonstre que XY e AC são paralelos.

Duração da Prova: 4 horas

XX Olimpíada Matemática del Cono Sur
Argentina 2009

Segundo dia
Mar del Plata, 17 de abril

Problema 4
Ana e Beto jogam em um tabuleiro de 11 linhas e 9 colunas. Primeiro Ana divide o tabuleiro em 33 *zonas*. Cada zona é formada por 3 casas adjacentes alinhadas vertical ou horizontalmente, como mostra a figura.



Depois, Beto escreve em cada casa um dos números 0, 1, 2, 3, 4, 5, de modo que a soma dos números de cada zona seja igual a 5. Beto ganha se a soma dos números escritos em cada uma das 9 colunas do tabuleiro é um número primo; caso contrário, Ana ganha. Demonstre que Beto tem uma estratégia vencedora.

Problema 5
Dada uma sequência S de 1001 números reais positivos não necessariamente distintos, e dado um conjunto A de números inteiros positivos distintos, a operação permitida é: eleger um $k \in A$ ($k = 1001$), selecionar k números de S, calcular a média dos k números (média aritmética) e substituir cada um dos k números selecionados por essa média.
Se A é um conjunto tal que para cada S pode-se conseguir, mediante uma sucessão de operações permitidas, que os números sejam todos iguais, determine o menor valor possível do maior elemento de A.

Problema 6
Pablo tem uma certa quantidade de retângulos cujas áreas somam 3 e cujos lados são todos menores ou iguais a 1. Demonstre que com esses retângulos é possível cobrir um quadrado de lado 1 de modo que os lados dos retângulos sejam paralelos aos lados do quadrado.
Nota: Os retângulos podem estar sobrepostos e podem sair parcialmente do quadrado.

Duração da Prova: 4 horas