

XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 2
(7ª. ou 8ª. séries)

Esta prova também corresponde à prova da Primeira
Fase da Olimpíada Regional nos Estados de :
BA – ES – RS – RN – PA – PE – PI – SC

10 de junho de 2006

A duração da prova é de 3 horas.
Cada problema vale 1 ponto.
Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.
Você pode solicitar papel para rascunho.
Entregue apenas a folha de respostas.

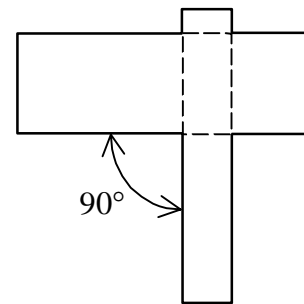
1. Efetuando as operações indicadas na expressão

$$\left(\frac{2^{2007} + 2^{2005}}{2^{2006} + 2^{2004}} \right) \times 2006$$

obtemos um número de quatro algarismos. Qual é a soma dos algarismos desse número?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

2. São dadas duas tiras retangulares de papel com 20 cm de comprimento, uma com 5 cm de largura e outra com 11 cm de largura. Uma delas foi colada sobre a outra, perpendicularmente, de modo a formar a figura ilustrada ao lado. O perímetro dessa figura, em centímetros é:



- A) 50
B) 60
C) 80
D) 100
E) 120

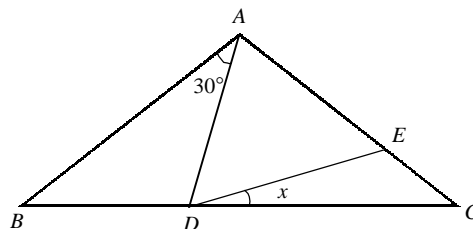
3. Se um número de dois dígitos é 5 vezes a soma de seus dígitos, então o número formado pela troca dos dígitos é a soma dos dígitos multiplicada por:

- A) 3 B) 5 C) 6 D) 4 E) 7

4. Ao redor de um grande lago existe uma ciclovía de 45 quilômetros de comprimento, na qual sempre se retorna ao ponto de partida se for percorrida num único sentido. Dois amigos partem de um mesmo ponto com velocidades constantes de 20 km por hora e 25 km por hora, respectivamente, em sentidos opostos. Quando se encontram pela primeira vez, o que estava correndo a 20 km por hora aumenta para 25 km por hora e o que estava a 25 km por hora diminui para 20 km por hora. Quanto tempo o amigo que chegar primeiro ao ponto de partida deverá esperar pelo outro?

- A) nada B) 10 min C) 12 min D) 15 min E) 18 min

5. Na figura, $AB = AC$, $AE = AD$ e o ângulo BAD mede 30° . Então o ângulo x mede:



- A) 10° B) 20° C) 15° D) 30° E) 5°

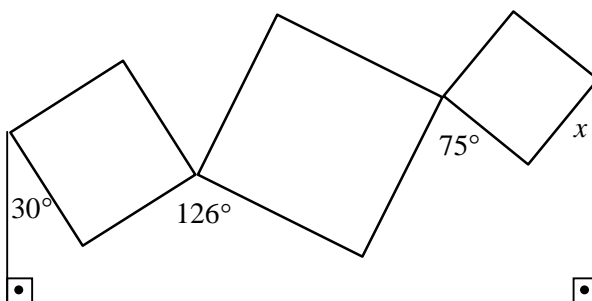
6. A soma de três números naturais consecutivos é igual ao produto desses três números. A soma dos quadrados desses números é:

- A) 14 B) 15 C) 18 D) 24 E) 36

7. No fim de 1994, Neto tinha a metade da idade de sua avó. A soma dos anos de nascimento dos dois é 3844. Em 2006 Neto fará:

- A) 55 anos B) 56 anos C) 60 anos D) 62 anos E) 108 anos

8. Três quadrados são colados pelos seus vértices entre si e a dois bastões verticais, como mostra a figura.



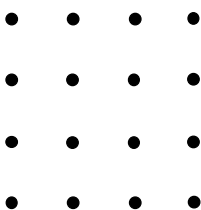
A medida do ângulo x é:

- A) 39° B) 41° C) 43° D) 44° E) 46°

9. Sejam a , b e c inteiros e positivos. Entre as opções abaixo, a expressão que **não** pode representar o número 24 é:

- A) ab^3 B) a^2b^3 C) $a^c b^c$ D) ab^2c^3 E) $a^b b^c c^a$

10. O número de quadrados que podem ser construídos com vértices nos pontos da figura abaixo é:



- A) 18 B) 14 C) 9 D) 20 E) 10

11. Seis amigos planejam viajar e decidem fazê-lo em duplas, cada uma utilizando um meio de transporte diferente, dentre os seguintes: avião, trem e carro. Alexandre acompanha Bento. André viaja de avião. Carlos não acompanha Dário nem faz uso do avião. Tomás não anda de trem. Qual das afirmações a seguir é correta?

- A) Bento vai de carro e Carlos vai de avião.
 B) Dário vai de trem e André vai de carro.
 C) Tomás vai de trem e Bento vai de avião.
 D) Alexandre vai de trem e Tomás vai de carro.
 E) André vai de trem e Alexandre vai de carro.

12. Um triângulo equilátero e um hexágono regular tem o mesmo perímetro. A razão entre a área do triângulo e a área do hexágono é:

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

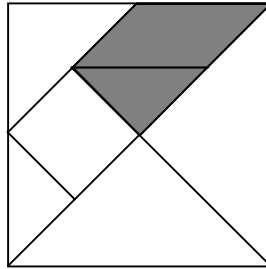
13. O máximo divisor comum de todos os termos da seqüência $a_n = n^3 - n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ é:

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14. Samuel possui três irmãos a mais do que irmãs. O número de irmãos de Samila, irmã de Samuel, é igual ao dobro do número de suas irmãs. O número de filhos (homens e mulheres) que possui o pai de Samuel e Samila é:

- A) 10 B) 13 C) 16 D) 17 E) 20

15. A figura a seguir representa um Tangram, quebra-cabeças chinês formado por 5 triângulos, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Sabendo que a área do Tangram a seguir é 64 cm^2 , qual é a área, em cm^2 , da região sombreada?



- A) 7,6 B) 8 C) 10,6 D) 12 E) 21,3

16. João escreveu todos os números com menos de 4 dígitos usando apenas os algarismos 1 e 2 numa folha de papel e depois somou todos eles. O valor obtido foi:

- A) 2314 B) 3000 C) 1401 D) 2316 E) 1716

17. Sejam a , b e c números reais positivos cuja soma é 1. Se a , b e c são as medidas dos lados de um triângulo, podemos concluir que

- A) $0 < |a-b| < \frac{1}{2}$ e $0 < |b-c| < \frac{1}{2}$ e $0 < |c-a| < \frac{1}{2}$ B) $a < \frac{1}{2}$ e $b < \frac{1}{2}$ e $c < \frac{1}{2}$
 C) $a+b < \frac{1}{2}$ e $b+c < \frac{1}{2}$ e $c+a < \frac{1}{2}$ D) $a \leq \frac{1}{3}$ e $b \leq \frac{1}{3}$ e $c \leq \frac{1}{3}$
 E) $a \geq \frac{1}{3}$ e $b \geq \frac{1}{3}$ e $c \geq \frac{1}{3}$

18. O número de soluções inteiras e positivas do sistema abaixo é:

$$\begin{cases} a+b=c^2 \\ a+b+c=30 \end{cases}$$

- A) 45 B) 23 C) 24 D) 25 E) 72

19. Um número com dois dígitos distintos e não nulos é chamado de bonito se o dígito das dezenas é maior do que o dígito das unidades. A quantidade de números bonitos é:

- A) 72 B) 36 C) 35 D) 64 E) 56

20. O professor Piraldo aplicou uma prova para seus cinco alunos e, após corrigi-las, digitou as notas em uma planilha eletrônica que calcula automaticamente a média das notas à medida que elas são digitadas. Piraldo notou que após digitar cada nota a média calculada pela planilha era um número inteiro. Se as notas dos cinco estudantes são, em ordem crescente, 71, 76, 80, 82 e 91, a última nota que Piraldo digitou foi:

- A) 71 B) 76 C) 80 D) 82 E) 91

21. Simplificando a expressão:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

obtemos:

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 1 D) $2+\sqrt{2}$ E) $2+\sqrt{3}$

22. Ludmilson percebeu que para numerar as páginas de um livro, consecutivamente, a partir da página 2, foram usados 2006 algarismos. O número de páginas do livro de Ludmilson é:

- A) 701 B) 702 C) 703 D) 704 E) 705

23. Sejam x, y, z números reais não nulos tais que $x + y + z = 0$. O valor de

$$(x^2 y^2 z^2) \left(\frac{1}{x^3 y^3} + \frac{1}{x^3 z^3} + \frac{1}{y^3 z^3} \right) \text{ é:}$$

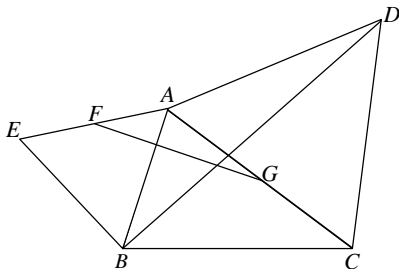
- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

24. Num relógio digital, as horas são exibidas por meio de quatro algarismos. Por exemplo, ao mostrar 00:00 sabemos que é meia-noite e ao mostrar 23:59 sabemos que falta um minuto para meia-noite. Quantas vezes por dia os quatro algarismos mostrados são todos pares?

- A) 60 B) 90 C) 105 D) 180 E) 240

25. Na figura a seguir, ABC é um triângulo qualquer e ACD e AEB são triângulos equiláteros. Se

F e G são os pontos médios de EA e AC , respectivamente, a razão $\frac{BD}{FG}$ é:



- A) $\frac{1}{2}$ B) 1
C) $\frac{3}{2}$ D) 2

E) Depende das medidas dos lados de ABC .