

XXX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 2
8º ou 9º anos (antigas 7ª e 8ª séries)

Esta prova também corresponde à prova da Primeira
Fase da Olimpíada Regional nos Estados de:
AL – BA – ES – GO – PI – RN – RS – SC

14 de junho de 2008

A duração da prova é de 3 horas.

Cada problema vale 1 ponto.

Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.

Você pode solicitar papel para rascunho.

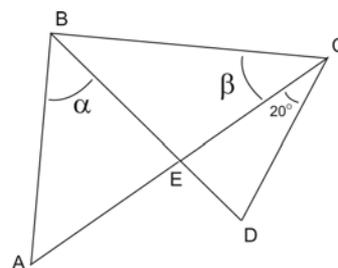
Entregue apenas a folha de respostas.

Ao participar o aluno se compromete a não divulgar o conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OBM.

01) No desenho temos $AE = BE = CE = CD$. Além disso, α e β

são medidas de ângulos. Qual é o valor da razão $\frac{\alpha}{\beta}$?

- A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) 1 D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{5}{3}$



02) Quantos dos números abaixo são maiores que 10?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
- $3\sqrt{11}$, $4\sqrt{7}$, $5\sqrt{5}$, $6\sqrt{3}$, $7\sqrt{2}$

03) $\sqrt{12^{12}}$ é igual a:

- A) 6^6 B) $12^{2\sqrt{3}}$ C) $2^{12} \cdot 3^6$ D) 6^{12} E) $\sqrt{12}^{\sqrt{12}}$

04) Uma grande empresa possui 84 funcionários e sabe-se que cada funcionário fala pelo menos uma das línguas entre Português e Inglês. Além disso, 20% dos que falam Português também falam Inglês e 80% dos que falam Inglês também falam Português. Quantos funcionários falam as duas línguas?

- A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 18

05) Edmilson, Carlos e Eduardo ganharam um total de R\$150,00 lavando carros. Eles ganharam quantidades diferentes de dinheiro. Como eles são muito amigos decidiram dividir o dinheiro ganho em partes iguais. Para isto, Edmilson deu metade do que ganhou para dividir em partes iguais entre Carlos e Eduardo, porém, Carlos tinha muito dinheiro e, portanto, deu R\$ 10,00 a cada um dos outros dois. Finalmente, para que cada um tivesse a mesma quantidade de dinheiro, Eduardo deu R\$ 2,00 a Edmilson. Quanto Eduardo ganhou antes da divisão?

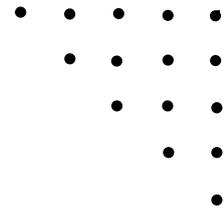
- A) R\$ 76,00 B) R\$ 51,00 C) R\$ 23,00 D) R\$ 50,00 E) R\$ 100,00

06) Nove números são escritos em ordem crescente. O número do meio é a média aritmética dos nove números. A média aritmética dos 5 maiores é 68 e a média aritmética dos 5 menores é 44. A soma de todos os números é:

- A) 560 B) 504 C) 112 D) 56 E) 70

07) Quantos quadrados têm como vértices os pontos do reticulado ao lado?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10



08) A primeira fase da OBM se realiza no dia 14 de junho, um sábado do ano bissexto 2008. Daqui a quantos anos o dia 14 de junho será novamente no sábado?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

09) Os algarismos a , b e c são tais que os números de dois algarismos \overline{aa} , \overline{bc} e \overline{cb} são números primos e $\overline{aa} + \overline{bc} + \overline{cb} = \overline{aa}^2$. Se $b < c$, então \overline{bc} é igual a:

- A) 19 B) 17 C) 37 D) 29 E) 59

10) Cinco inteiros positivos a, b, c, d, e maiores que um satisfazem as seguintes condições:

$$a(b+c+d+e) = 128$$

$$b(a+c+d+e) = 155$$

$$c(a+b+d+e) = 203$$

$$d(a+b+c+e) = 243$$

$$e(a+b+c+d) = 275$$

Quanto vale a soma $a + b + c + d + e$?

- A) 9 B) 16 C) 25 D) 36 E) 49

11) Em um triângulo ABC foi traçada a altura AH. Sejam M e N pontos sobre os lados AB e AC, respectivamente, tais que HM é perpendicular a AB e HN é perpendicular a AC. Achar MN, sabendo que o perímetro do triângulo órtico do triângulo ABC é igual a 10.

Observação: o triângulo órtico de um triângulo é aquele cujos vértices são as interseções das alturas do triângulo com os respectivos lados. Pode-se demonstrar que o incentro (encontro das bissetrizes) do triângulo órtico é sempre igual ao ortocentro (encontro das alturas) do triângulo original.

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

12) Quantos números inteiros positivos menores que 500 têm exatamente 15 divisores inteiros positivos?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

13) Seja $P(n)$ a soma dos algarismos pares do número n . Por exemplo, $P(1234) = 2 + 4 = 6$. Qual o valor de $P(1) + P(2) + P(3) + \dots + P(100)$?

- A) 200 B) 360 C) 400 D) 900 E) 2250

14) De quantas maneiras podemos dividir R\$ 10,00 em moedas de 10 centavos e de 25 centavos, se pelo menos uma moeda de cada valor tem que ser usada?

- A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

15) Sejam a, b, c, d números inteiros tais que $a < 2b$, $b < 3c$, $c < 4d$. Se $d < 40$, o maior valor possível de a será:

- A) 960 B) 959 C) 951 D) 934 E) 927

16) A figura abaixo é um exemplo de um quadrado mágico de ordem 4. A soma dos 4 números em cada linha, coluna e diagonal é 34. Então dizemos que a soma mágica deste quadrado mágico é 34. Suponha que exista um quadrado mágico de ordem 7, formado pelos números inteiros de 1 a 49. Determine sua soma mágica.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

- A) 175 B) 2450 C) 1225 D) 190 E) 100

17) Observe que:

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2,$$

$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2.$$

Qual o menor valor possível da soma $x + y$ com x, y inteiros positivos tais que

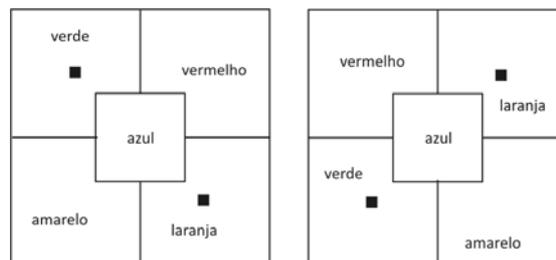
$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 + x^2 = y^2?$$

- A) 289 B) 250 C) 425 D) 795 E) 103

18) Um número de três algarismos é 629 vezes menor que a soma de todos os outros números de três algarismos. Este número é:

- A) 450 B) 785 C) 630 D) 471 E) 525

19) Soninha tem muitos cartões, todos com o mesmo desenho em uma das faces. Ela vai usar cinco cores diferentes (verde, amarelo, azul, vermelho e laranja) para pintar cada uma das cinco partes do desenho, cada parte com uma cor diferente, de modo que não haja dois cartões pintados da mesma forma. Na figura abaixo, por exemplo, os cartões são iguais, pois um deles pode ser girado para se obter o outro. Quantos cartões diferentes Soninha conseguirá produzir?



- A) 16 B) 25 C) 30 D) 60 E) 120

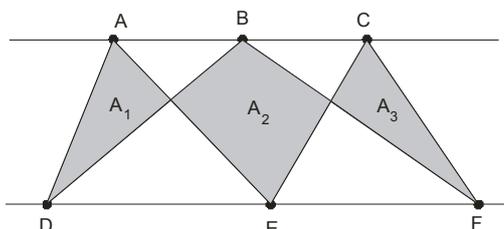
20) Em um triângulo ABC, $\angle A = 20^\circ$ e $\angle B = 110^\circ$. Se I é o incentro (centro da circunferência inscrita) e O o circuncentro (centro da circunferência circunscrita) do triângulo ABC, qual a medida do ângulo $\angle IAO$?

- A) 20° B) 25° C) 30° D) 40° E) 35°

21) Uma classe tem 22 alunos e 18 alunas. Durante as férias, 60% de todos os alunos dessa classe foram prestar trabalho comunitário. No mínimo, quantas alunas participaram desse trabalho?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

22) Na figura abaixo os pontos A, B, C são colineares, assim como os pontos D, E, F. As duas retas ABC e DEF são paralelas.



Sejam A_1, A_2 e A_3 as áreas das regiões destacadas na figura, podemos afirmar que:

- A) $A_2 = 2A_1 = 2A_3$ B) $A_2 = A_1 + A_3$ C) $A_2 > A_1 + A_3$
 D) $A_2 < A_1 + A_3$ E) $A_2^2 = A_1 \cdot A_3$

23) O grupo A da última Copa do Mundo de futebol terminou com os seguintes resultados:

Equipe	Número de Pontos
Áustria	7
Brasil	5
Camarões	4
Dinamarca	0

Sabe-se que Áustria e Camarões levaram apenas 1 gol, cada um. Além disso, Brasil e Dinamarca marcaram apenas 1 gol, cada um, enquanto que Áustria marcou 3 gols. Qual o resultado da partida Áustria \times Dinamarca?

Observação: no grupo, cada seleção joga com as demais exatamente uma vez e, em cada partida, o time vencedor ganha 3 pontos, o perdedor não ganha nem perde pontos e, em caso de empate, cada time ganha 1 ponto.

- A) 1×0 B) 2×1 C) 2×0 D) 0×0
 E) Nada se pode afirmar.

24) Abaixo temos um quadrado mágico multiplicativo, onde o produto dos números em cada linha, coluna e diagonal é o mesmo e igual ao número de quatro dígitos ABCD, onde cada letra representa um dígito e cada casa contém um número inteiro. Se AC representa o número de dois dígitos no centro do quadrado, a soma $A + B + C + D$ vale:

		4
	AC	
	C	24

- A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

25) Tenho um cubo de madeira, com três faces vermelhas e três faces azuis. O cubo é cortado em $3 \times 3 \times 3 = 27$ cubos menores. Quantos destes cubos menores têm, pelo menos, uma face vermelha e outra azul?

- A) 6 B) 12 C) 14 D) 16
 E) depende de quais faces do cubo são vermelhas e quais são azuis.