XXVII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 3
(Ensino Médio)

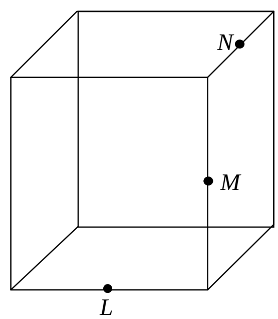
Esta prova também corresponde à prova da Primeira Fase da Olimpíada Regional nos Estados de :
AM – AL – BA – PA – PB – PI – PR– RS – RN – SC

11 de junho de 2005

A duração da prova é de 3 horas.
Cada problema vale 1 ponto.
Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.
Você pode solicitar papel para rascunho.
Entregue apenas a folha de respostas.

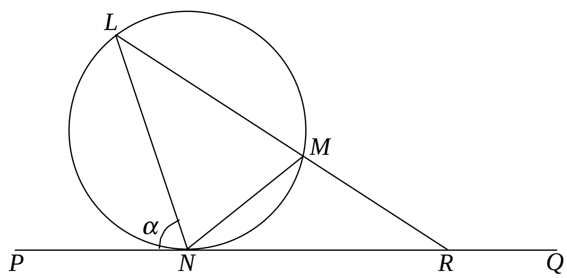
1. Quantos números entre 10 e 13000, quando lidos da esquerda para a direita, são formados por dígitos consecutivos e em ordem crescente? Exemplificando, 456 é um desses números, mas 7890 não é:
A) 10 B) 13 C) 18 D) 22 E) 25

2. Os pontos *L*, *M* e *N* são pontos médios de arestas do cubo, como mostra a figura. Quanto mede o ângulo *LMN*?



A) 90^{o} B) 105^{o} C) 120^{o} D) 135^{o} E) 150^{o}

3. Na figura, a reta *PQ* toca em *N* o círculo que passa por *L*, *M* e *N*. A reta *LM* corta a reta *PQ* em *R*. Se $LM = LN$ e a medida do ângulo *PNL* é α, $\alpha < 60^{o}$, quanto mede o ângulo *LRP*?



A) $3\alpha - 180^{o}$ B) $180^{o} - 2\alpha$ C) $180^{o} - \alpha$ D) $90^{o} - \alpha/2$ E) α

4. As letras *O*, *B* e *M* representam números inteiros. Se $O \times B \times M = 240$, $O \times B + M = 46$ e $O + B \times M = 64$, quanto vale $O + B + M$?
A) 19 B) 20 C) 21 D) 24 E) 36

5. Esmeralda digitou corretamente um múltiplo de 7 muito grande, com 4010 algarismos. Da esquerda para a direita, os seus algarismos são 2004 algarismos 1, um algarismo *n* e 2005 algarismos 2. Qual é o valor de *n*?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

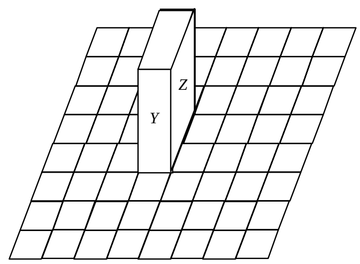
6. Os inteiros positivos x e y satisfazem a equação

$$\sqrt{x+\tfrac{1}{2}\sqrt{y}}-\sqrt{x-\tfrac{1}{2}\sqrt{y}}=1.$$

Qual das alternativas apresenta um possível valor de y?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

7. Um bloco de dimensões $1\times2\times3$ é colocado sobre um tabuleiro 8×8, como mostra a figura, com a face X, de dimensões 1×2, virada para baixo. Giramos o bloco em torno de uma de suas arestas de modo que a face Y fique virada para baixo. Em seguida, giramos novamente o bloco, mas desta vez de modo que a face Z fique virada para baixo. Giramos o bloco mais três vezes, fazendo com que as faces X, Y e Z fiquem viradas para baixo, nessa ordem. Quantos quadradinhos diferentes do tabuleiro estiveram em contato com o bloco?



A)18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

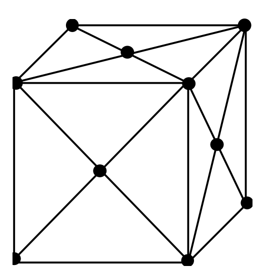
8. Uma loja de sabonetes realiza uma promoção com o anúncio *"Compre um e leve outro pela metade do preço"*. Outra promoção que a loja poderia fazer oferecendo o mesmo desconto percentual é:

A)*"Leve dois e pague um"* B)*"Leve três e pague um"*
C)*"Leve três e pague dois"* D)*"Leve quatro e pague três"*
E)*"Leve cinco e pague quatro"*

9. Platina é um metal muito raro, mais raro até do que ouro. Sua densidade é 21,45 g/cm^3. Suponha que a produção mundial de platina foi de cerca de 110 toneladas em cada um dos últimos 50 anos e desprezível antes disso. Assinale a alternativa com o objeto cujo volume é mais próximo do volume de platina produzido no mundo em toda a história.

A) uma caixa de sapatos B) uma piscina
C) um edifício de dez andares D) o monte Pascoal E) a Lua

10. A figura mostra um cubo de aresta 1 no qual todas as doze diagonais de face foram desenhadas. Com isso, criou-se uma rede com 14 vértices (os 8 vértices do cubo e os 6 centros de faces) e 36 arestas (as 12 arestas do cubo e mais 4 sobre cada uma das 6 faces). Qual é o comprimento do menor caminho que é formado por arestas da rede e que passa por todos os 14 vértices?



A) $1+6\sqrt{2}$ B) $4+2\sqrt{2}$ C) 6 D) $8+6\sqrt{2}$ E) $12+12\sqrt{2}$

11. Uma das faces de um poliedro é um hexágono regular. Qual é a quantidade mínima de arestas que esse poliedro pode ter?

A) 7 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

12. Em um ano, no máximo quantos meses têm cinco domingos?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

13. O ponto D pertence ao lado BC do triângulo ABC. Sabendo que $AB = AD = 2$, $BD = 1$ e os ângulos BAD e CAD são congruentes, então a medida do segmento CD é:

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{7}{6}$

14. Esmeralda adora os números triangulares (ou seja, os números 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28…), tanto que mudou de lugar os números 1, 2, 3, …, 11 do relógio de parede do seu quarto de modo que a soma de cada par de números vizinhos é um número triangular. Ela deixou o 12 no seu lugar original. Que número ocupa o lugar que era do 6 no relógio original?

A) 1 B) 4 C) 5 D) 10 E) 11

15. Os termos a_n de uma seqüência de inteiros positivos satisfazem a relação

$$a_{n+3} = a_{n+2}(a_{n+1} + a_n) \text{ para } n = 1, 2, 3\ldots$$

Se $a_5 = 35$, quanto é a_4?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

16. Sendo a, b e c números reais, pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, é verdade que $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$. A distributiva da adição em relação à multiplicação $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$ não é sempre verdadeira, mas ocorre se, e somente se,

A) $a = b = c = \frac{1}{3}$ ou $a = 0$

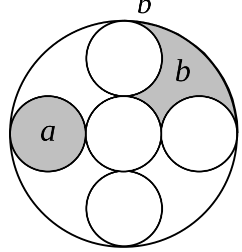
B) $a = b = c$

C) A igualdade nunca ocorre

D) $a + b + c = 1$ ou $a = 0$

E) $a = b = c = 0$

17. Na figura, todas as circunferências menores têm o mesmo raio r e os centros das circunferências que tocam a circunferência maior são vértices de um quadrado. Sejam a e b as áreas cinzas indicadas na figura. Então a razão $\frac{a}{b}$ é igual a:



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

18. Entre treze reais não nulos há mais números positivos do que negativos. Dentre os $\frac{13\times 12}{2}=78$ produtos de dois dos treze números, 22 são negativos. Quantos números dentre os treze números dados são negativos?

A) 2 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

19. Traçando as quatro retas perpendiculares aos lados de um paralelogramo não retângulo pelos seus pontos médios, obtém-se uma região do plano limitada por essas quatro retas. Podemos afirmar que a área dessa região é igual à área do paralelogramo se um dos ângulos do paralelogramo for igual a:

A) 30^o B) 45^o C) 60^o D) 75^o E) 90^o

20. O número $(2+\sqrt{2})^3(3-\sqrt{2})^4+(2-\sqrt{2})^3(3+\sqrt{2})^4$ é:

A) inteiro ímpar B) inteiro par
C) racional não inteiro D) irracional positivo E) irracional negativo

21. Sejam $A=10^{(\log_{10}2005)^2}$, $B=2005^3$ e $C=2^{\sqrt{2005}}$. Então:

A) $A<B<C$ B) $A<C<B$
C) $B<A<C$ D) $B<C<A$ E) $C<A<B$

22. Um piloto percorreu três trechos de um rali, de extensões 240 km, 300 km e 400 km, respectivamente. As velocidades médias nos três trechos foram 40 km/h, 75 km/h e 80 km/h, mas não necessariamente nessa ordem. Podemos garantir que o tempo total em horas gasto pelo piloto nos três trechos é:

A) menor ou igual a 13 horas
B) maior ou igual a 13 horas e menor ou igual a 16 horas
C) maior ou igual a 14 horas e menor ou igual a 17 horas
D) maior ou igual a 15 horas e menor ou igual a 18 horas
E) maior ou igual a 18 horas

23. Dois números inteiros são chamados de *primanos* quando pertencem a uma progressão aritmética de números primos com pelo menos três termos. Por exemplo, os números 41 e 59 são primanos pois pertencem à progressão aritmética (41; 47; 53; 59) que contém somente números primos.

Assinale a alternativa com dois números que **não são** primanos.

A) 7 e 11 B) 13 e 53 C) 41 e 131 D) 31 e 43 E) 23 e 41

24. Um relógio, com ponteiros de horas, minutos e segundos, faz *plim* toda vez que um ponteiro ultrapassa outro no mostrador. O número de *plins* registrados em um certo dia no período entre as 12 horas e 1 segundo e as 23 horas, 59 minutos e 59 segundos é:

A) 732 B) 1438 C) 1440 D) 1446 E) 1452

25. Um professor de inglês dá aula particular para uma classe de 9 alunos, dos quais pelo menos um é brasileiro. Se o professor escolher 4 alunos para fazer uma apresentação, terá no grupo pelo menos dois alunos de mesma nacionalidade; se escolher 5 alunos, terá no máximo três alunos de mesma nacionalidade. Quantos brasileiros existem na classe?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5