XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

1ª. Fase Olimpíada Regional
AL – BA – ES – GO – PI – PA – PE – RN – RS – SC
João Pessoa – PB – S. B. do Campo – SP
5 de junho de 2004

- A duração da prova é de 3 horas.
- Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.
- Você pode solicitar papel para rascunho.
- Entregue apenas a folha de respostas.

---

1. A função *f* é dada pela tabela a seguir.

x	1	2	3	4	5
f(*x*)	4	1	3	5	2

Por exemplo, $f(2) = 1$. Quanto vale $\underbrace{f(f(...(f(f}_{2004 \text{ vezes}}(4))...))$?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

2. Seja *AB* um segmento de comprimento 26, e sejam *C* e *D* pontos sobre o segmento *AB* tais que $AC = 1$ e $AD = 8$. Sejam *E* e *F* pontos sobre uma semicircunferência de diâmetro *AB*, sendo *EC* e *FD* perpendiculares a *AB*. Quanto mede o segmento *EF*?

A) 5 **B)** $5\sqrt{2}$ **C)** 7 **D)** $7\sqrt{2}$ **E)** 12

3. As alturas de um triângulo medem 12, 15 e 20. O maior ângulo interno do triângulo mede

A) 72º **B)** 75º **C)** 90º **D)** 108º **E)** 120º

4. Esmeralda, a digitadora, tentou digitar um número de seis algarismos, mas os dois algarismos 1 não apareceram (a tecla devia estar com defeito). O que apareceu foi 2004. Quantos são os números de seis algarismos que ela pode ter tentado digitar?

A) 4 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 20

5. O produto dos números que aparecem nas alternativas incorretas dessa questão é um cubo perfeito.
Assinale a alternativa correta.

A) 4 **B)** 8 **C)** 18 **D)** 54 **E)** 192

6. Qual é o menor inteiro positivo *n* para o qual qualquer subconjunto de *n* elementos de {1,2,3,…,20} contém dois números cuja diferença é 8?

A) 2 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 15

7. Sejam

$$a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \cdots + \frac{1001^2}{2001}$$

e

$$b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \cdots + \frac{1001^2}{2003}.$$

Qual é o inteiro mais próximo de $a - b$?

A) 500 **B)** 501 **C)** 999 **D)** 1000 **E)** 1001

8. Uma ampulheta é formada por dois cones idênticos. Inicialmente, o cone superior está cheio de areia e o cone inferior está vazio. A areia flui do cone superior para o inferior com vazão constante. O cone superior se esvazia em exatamente uma hora e meia. Quanto tempo demora até que a altura da areia no cone inferior seja metade da altura da areia no cone superior?
A) 30min
B) 10h
C) 1h03min20s
D) 1h10min12s
E) 1h14min30s

9. A função real f, definida nos inteiros, satisfaz $f(n) - (n + 1)f(2 - n) = (n + 3)^2$, para todo n inteiro. Quanto vale $f(0)$?
A) –17 **B)** 0 **C)** 1 **D)** 2 **E)** 9

10. Com três algarismos distintos a, b e c, é possível formar 6 números de dois algarismos distintos. Quantos conjuntos $\{a, b, c\}$ são tais que a soma dos 6 números formados é 484?
A) Um **B)** Dois **C)** Três **D)** Quatro **E)** Mais que quatro

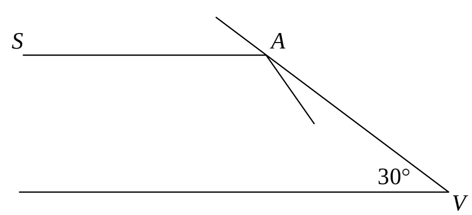
11. Dois cubos têm faces pintadas de ocre ou magenta. O primeiro cubo tem cinco faces ocres e uma face magenta. Quando os dois cubos são lançados, a probabilidade de as faces viradas para cima dos dois cubos serem da mesma cor (sim, ocre e magenta são cores!) é 1/2. Quantas faces ocres tem o segundo cubo?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

12. Para quantos inteiros positivos m o número

$$\frac{2004}{m^2 - 2}$$

é um inteiro positivo?
A) um **B)** dois **C)** três **D)** quatro **E)** mais que quatro

13. Dois espelhos formam um ângulo de 30º no ponto V. Um raio de luz, vindo de uma fonte S, é emitido paralelamente a um dos espelhos e é refletido pelo outro espelho no ponto A, como mostra a figura. Depois de uma certa quantidade de reflexões, o raio retorna a S. Se AS e AV têm 1 metro de comprimento, a distância percorrida pelo raio de luz, em metros, é



A) 2
B) $2+\sqrt{3}$ **C)** $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$
D) $\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$ **E)** $5\sqrt{3}$

14. Para n inteiro positivo, definimos $n!$ (lê-se "*n fatorial*") o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n. Por exemplo, $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$.
Se $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, então n é igual a
A) 13 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 17

15. Constrói-se o quadrado *ABXY* sobre o lado *AB* do heptágono regular *ABCDEFG*, exteriormente ao heptágono. Determine a medida do ângulo $B\hat{X}C$, em radianos.

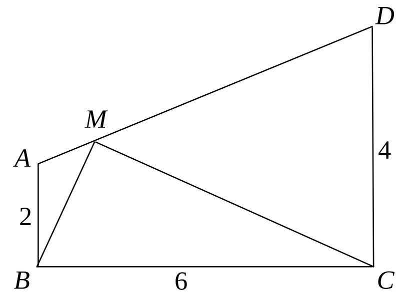
A) $\dfrac{\pi}{7}$ **B)** $\dfrac{3\pi}{7}$ **C)** $\dfrac{\pi}{14}$ **D)** $\dfrac{3\pi}{14}$ **E)** $\dfrac{3\pi}{28}$

16. conjunto das raízes reais da equação $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$ é

A) {1} **B)** {1, 2} **C)** [1, 2] **D)**]1, 2[**E)** {2}

17. No desenho ao lado, os segmentos AB e CD são perpendiculares ao segmento BC. Sabendo que o ponto *M* pertence ao segmento AD e que o triângulo *BMC* é retângulo não isósceles, qual é a área do triângulo *ABM* ?

A) 1 **B)** $\dfrac{6}{5}$ **C)** $\dfrac{7}{5}$ **D)** $\dfrac{8}{5}$ **E)** $\dfrac{9}{5}$



18. Entre 1986 e 1989, a moeda do país era o cruzado (Cz$). Com a imensa inflação que tivemos, a moeda foi mudada algumas vezes: tivemos o cruzado novo, o cruzeiro, o cruzeiro real e, finalmente, o real. A conversão entre o cruzado e o real é:

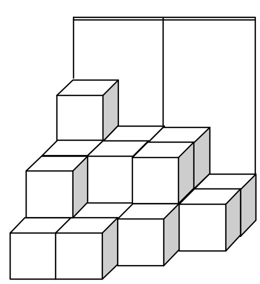
1 real = 2.750.000.000 cruzados

Imagine que a moeda não tivesse mudado e que João, que ganha hoje 640 reais por mês, tivesse que receber seu salário em notas novas de 1 cruzado. Se uma pilha de 100 notas novas tem 1,5 cm de altura, o salário em cruzados de João faria uma pilha de altura:

A) 26,4 km **B)** 264 km **C)** 2640 km **D)** 26400 km **E)** 264000 km

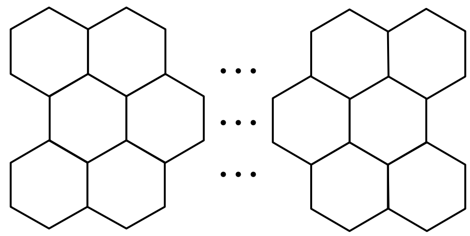
19. dono de uma loja empilhou vários blocos medindo 0,8m x 0,8m x 0,8m no canto da loja e encostados numa parede de vidro que dá para a rua, conforme mostra a figura abaixo.
Quantos blocos no máximo, uma pessoa de 1,80m de altura que está do lado de fora da loja pode enxergar?

Obs. Consideramos que uma pessoa pode enxergar uma caixa se consegue ver uma pequena região de área positiva de sua superfície.



A) 13 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 17

20. arranjo a seguir, composto por 32 hexágonos, foi montado com varetas, todas com comprimento igual ao lado do hexágono. Quantas varetas, no mínimo, são necessárias para montar o arranjo?



A) 113 **B)** 123 **C)** 122 **D)** 132 **E)** 152

21. Numa prova para uma sala com 30 alunos, a média aritmética das 10 piores notas é 3 e a média aritmética das 10 melhores notas é 9. O menor valor possível e o maior valor possível para a média da sala são, respectivamente:

A) 6 e 7 **B)** 5 e 7 **C)** 4 e 6 **D)** 3 e 9 **E)** 4 e 8

22. Sobre uma mesa estão três caixas e três objetos, cada um em uma caixa diferente: uma moeda, um grampo e uma borracha. Sabe-se que

- A caixa verde está à esquerda da caixa azul;
- A moeda está à esquerda da borracha;
- A caixa vermelha está à direita do grampo;
- A borracha está à direita da caixa vermelha.

Em que caixa está a moeda?

A) Na caixa vermelha .
B) Na caixa verde.
C) Na caixa azul.
D) As informações fornecidas são insuficientes para se dar uma resposta.
E) As informações fornecidas são contraditórias.

23. Esmeralda, a digitadora, queria digitar um número N de dois algarismos que é quadrado perfeito, mas se enganou, trocando cada algarismo pelo seu sucessor (afinal, as teclas são vizinhas!). Por uma grande coincidência, o número digitado também é quadrado perfeito! Qual é a soma dos algarismos de N?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

24. Esmeralda escreveu (corretamente!) todos os números de 1 a 999, um atrás do outro:

12345678910111213… 997998999.

Quantas vezes aparece o agrupamento “21”, nesta ordem?

A) 11 **B)** 21 **C)** 31 **D)** 41 **E)** 51

25. Um feirante vende batatas e, para pesar, utiliza uma balança de dois pratos, um peso de 1 kg, um peso de 3 kg e um peso de 10 kg. Considere a seguinte afirmação: “Este feirante consegue pesar (com uma pesagem) n quilogramas de batatas”. Quantos valores positivos de n tornam essa afirmação verdadeira, supondo que ele pode colocar pesos nos dois pratos?

A) 7 **B)** 10 **C)** 12 **D)**13 **E)**14