

**XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA**  
**Primeira Fase – Nível 3**  
**(Ensino Médio)**

Esta prova também corresponde à prova da Primeira  
 Fase da Olimpíada Regional nos Estados de :  
 BA – ES – RS – RN – PA – PE – PI – SC

10 de junho de 2006

A duração da prova é de 3 horas.  
 Cada problema vale 1 ponto.  
 Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.  
 Você pode solicitar papel para rascunho.  
 Entregue apenas a folha de respostas.

1. No fim de 1994, Neto tinha a metade da idade de sua avó. A soma dos anos de nascimento dos dois é 3844. Quantos anos Neto completa em 2006?

- A) 55            B) 56            C) 60            D) 62            E) 108

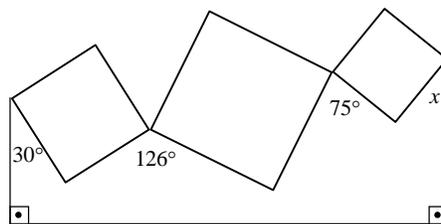
2. Quantos resultados diferentes podemos obter somando pares de números distintos do conjunto  $\{1, 2, \dots, 2006\}$  ?

- A) 2006            B) 2007            C) 4009            D) 4011            E) 4012

3. Uma colônia de amebas tem inicialmente uma ameba amarela e uma ameba vermelha. Todo dia, uma única ameba se divide em duas amebas idênticas. Cada ameba na colônia tem a mesma probabilidade de se dividir, não importando sua idade ou cor. Qual é a probabilidade de que, após 2006 dias, a colônia tenha exatamente uma ameba amarela?

- A)  $\frac{1}{2^{2006}}$             B)  $\frac{1}{2006}$             C)  $\frac{1}{2007}$             D)  $\frac{1}{2006 \cdot 2007}$             E)  $\frac{2006}{2007}$

4. Três quadrados são colados pelos seus vértices entre si e a dois bastões verticais, como mostra a figura.



Qual a medida do ângulo  $x$ ?

- A)  $39^\circ$             B)  $41^\circ$             C)  $43^\circ$             D)  $44^\circ$             E)  $46^\circ$

5. Os dois números reais  $a$  e  $b$  são não nulos e satisfazem  $ab = a - b$ . Assinale a alternativa que

exibe um dos possíveis valores de  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$ .

- A)  $-2$             B)  $-\frac{1}{2}$             C)  $\frac{1}{3}$             D)  $\frac{1}{2}$             E)  $2$

6. De quantas maneiras podemos colocar, em cada espaço abaixo, um entre os algarismos 4, 5, 6, 7, 8, 9, de modo que todos os seis algarismos apareçam e formem, em cada membro, números de dois algarismos que satisfazem a dupla desigualdade?

--- > --- > ---

- A) 100            B) 120            C) 240            D) 480            E) 720

7. Que expressão não pode representar o número 24 para valores inteiros positivos convenientes de  $a$ ,  $b$  e  $c$ ?

- A)  $ab^3$       B)  $a^2b^3$       C)  $a^cb^c$       D)  $ab^2c^3$       E)  $a^bb^c c^a$

8. Qual dos valores abaixo de  $x$  é tal que  $2x^2 + 2x + 19$  não é um número primo?

- A) 50      B) 37      C) 9      D) 5      E) 1

9. Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  números reais positivos cuja soma é 1. Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são as medidas dos lados de um triângulo, podemos concluir que

- A)  $0 < |a-b| < \frac{1}{2}$  e  $0 < |b-c| < \frac{1}{2}$  e  $0 < |c-a| < \frac{1}{2}$       B)  $a < \frac{1}{2}$  e  $b < \frac{1}{2}$  e  $c < \frac{1}{2}$   
C)  $a+b < \frac{1}{2}$  e  $b+c < \frac{1}{2}$  e  $c+a < \frac{1}{2}$       D)  $a \leq \frac{1}{3}$  e  $b \leq \frac{1}{3}$  e  $c \leq \frac{1}{3}$   
E)  $a \geq \frac{1}{3}$  e  $b \geq \frac{1}{3}$  e  $c \geq \frac{1}{3}$

10. Uma seqüência tem 9 números reais, sendo o primeiro 20 e o último, 6. Cada termo da seqüência, a partir do terceiro, é a média aritmética de todos os anteriores. Qual é o segundo termo da seqüência?

- A) -8      B) 0      C) 4      D) 14      E) 2006

11. Quantos ternos de números reais  $x$ ,  $y$ ,  $z$  satisfazem o sistema abaixo?

$$\begin{cases} x(x+y+z) = 2005 \\ y(x+y+z) = 2006 \\ z(x+y+z) = 2007 \end{cases}$$

- A) Nenhum      B) 1      C) 2      D) 3      E) 2006

12. Arnaldo tem vários quadrados azuis  $1 \times 1$ , vários quadrados amarelos  $2 \times 2$  e vários quadrados verdes  $3 \times 3$  e quer montar um quadrado maior no qual apareçam as três cores. Qual é a menor quantidade de quadrados que ele poderá utilizar ao todo?

- A) 3      B) 6      C) 7      D) 8      E) 9

13. Sejam  $x$  e  $y$  números racionais. Sabendo que  $\frac{x-5\sqrt{2006}}{4-y\sqrt{2006}}$  também é um número racional,

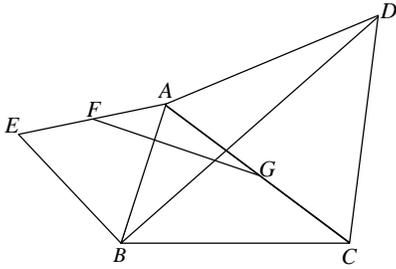
quanto vale o produto  $xy$ ?

- A) 20  
B) Pode ser igual a 20, mas também pode assumir outros valores.  
C) 1  
D) 6  
E) Não se pode determinar.

14. O professor Piraldo aplicou uma prova para seus cinco alunos e, após corrigi-las, digitou as notas em uma planilha eletrônica que calcula automaticamente a média das notas à medida que elas são digitadas. Piraldo notou que após digitar cada nota a média calculada pela planilha era um número inteiro. Se as notas dos cinco estudantes são, em ordem crescente, 71, 76, 80, 82 e 91, qual foi a última nota que Piraldo digitou?

- A) 71      B) 76      C) 80      D) 82      E) 91

15. Na figura a seguir,  $ABC$  é um triângulo qualquer e  $ACD$  e  $AEB$  são triângulos equiláteros. Se  $F$  e  $G$  são os pontos médios de  $EA$  e  $AC$ , respectivamente, a razão  $\frac{BD}{FG}$  é:

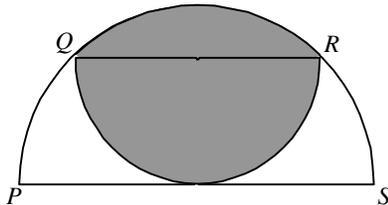


- A)  $\frac{1}{2}$                       B) 1  
 C)  $\frac{3}{2}$                       D) 2  
 E) Depende das medidas dos lados de  $ABC$ .

16. O inteiro positivo  $x$  é múltiplo de 2006 e  $\sqrt{x}$  está entre 2005 e 2007. Qual é o número de possíveis valores de  $x$ ?

- A) 1                      B) 2                      C) 3                      D) 4                      E) 5

17. Na figura temos dois semicírculos de diâmetros  $PS$ , de medida 4, e  $QR$ , paralelo a  $PS$ . Além disso, o semicírculo menor é tangente a  $PS$  em  $O$ . Qual é a área destacada?



- A)  $2\pi - 2$   
 B)  $3\pi$   
 C)  $\pi$   
 D) 4  
 E)  $2\pi - 4$

18. Iniciando com o par (2048, 1024), podemos aplicar quantas vezes quisermos a operação que transforma o par  $(a, b)$  no par  $\left(\frac{3a+b}{4}, \frac{a+3b}{4}\right)$ , então, dentre os seguintes pares:

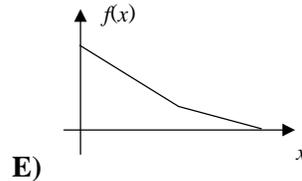
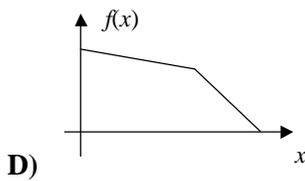
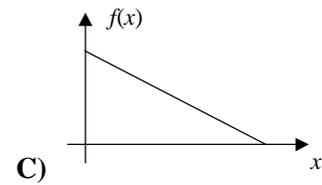
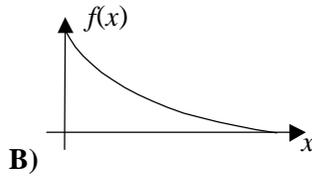
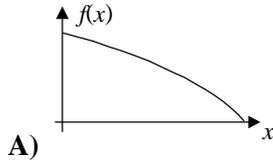
- 1) (1664, 1408)
- 2) (1540, 1532)
- 3) (1792, 1282)
- 4) (1537, 1535)
- 5) (1546, 1526)

- A) Todos podem ser obtidos.  
 B) Apenas o par 4 não pode ser obtido.  
 C) Apenas o par 3 não pode ser obtido.  
 D) Existem exatamente dois pares que não podem ser obtidos.  
 E) Existem mais de dois pares que não podem ser obtidos.

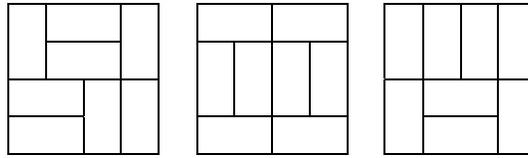
19. Num tabuleiro retangular de 13 linhas e 17 colunas colocamos números em cada casinha da seguinte maneira: primeiro, numeramos as casinhas da primeira linha, da esquerda para a direita, com os números 1, 2, 3, ..., 17, nessa ordem; depois numeramos a segunda linha, também da esquerda para a direita, com os números de 18 a 34, e assim por diante. Após preencheremos todo o tabuleiro, colocamos em cada casinha um segundo número, numerando as casinhas da primeira coluna, de cima para baixo, com os números 1, 2, 3, ..., 13, nessa ordem, depois numeramos a segunda coluna, também de cima para baixo, com os números de 14 a 26, e assim por diante. Deste modo, cada casinha tem dois números. Quantas casinhas têm dois números iguais?

- A) 2                      B) 3                      C) 4                      D) 5                      E) 6

20. Altino está encostado num muro bem alto, durante a noite. A rua onde Altino está é iluminada por uma lâmpada no topo de um poste de 4 metros de altura, a 10 metros de distância do muro. Altino, um rapaz de 2 metros de altura, anda em direção ao muro. Seja  $f(x)$  a altura, em metros, da sombra de Altino produzida pela lâmpada no muro quando Altino está a uma distância de  $x$  metros do muro. Qual alternativa representa melhor o gráfico de  $f(x)$ ?



21. O piso de um quarto tem forma de um quadrado de lado 4 m. De quantas maneiras podemos cobrir totalmente o quarto com oito tapetes iguais de dimensões 1 m e 2 m? Mostramos abaixo três maneiras de fazê-lo:



- A) 27      B) 30      C) 34      D) 36      E) 52

22. Dois pontos  $A$  e  $B$  de um plano  $\alpha$  estão a 8 unidades de distância. Quantas retas do plano  $\alpha$  estão a 2 unidades de  $A$  e 3 unidades de  $B$ ?

- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

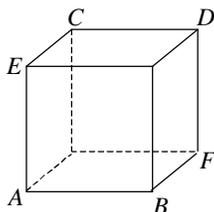
23. Considere os 2161 produtos  $0 \cdot 2160, 1 \cdot 2159, 2 \cdot 2158, \dots, 2160 \cdot 0$ . Quantos deles são múltiplos de 2160?

- A) 2      B) 3      C) 12      D) 13      E) 2161

24. Qual é o menor valor que a expressão  $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{(y-x)^2+4} + \sqrt{(z-y)^2+1} + \sqrt{(10-z)^2+9}$  pode assumir, sendo  $x, y$  e  $z$  reais?

- A) 7      B) 13      C)  $4 + \sqrt{109}$       D)  $3 + \sqrt{2} + \sqrt{90}$       E)  $\sqrt{149}$

25. Um cubo de aresta 1 é cortado em quatro regiões por dois planos: um deles contém as arestas  $AB$  e  $CD$  e o outro contém as arestas  $AE$  e  $DF$ . Qual é o volume da(s) maior(es) das quatro regiões?



- A)  $\frac{1}{4}$       B)  $\frac{1}{3}$       C)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$       D)  $\frac{3}{8}$   
E)  $\frac{1}{2}$