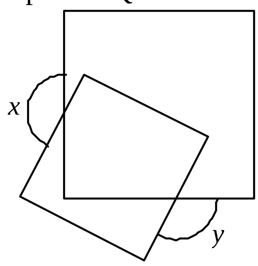
XXIX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 3
(Ensino Médio)

Esta prova também corresponde à prova da Primeira Fase da Olimpíada Regional nos Estados de :
AL – BA – ES – GO – PA – PI – RN – RS – SC

16 de junho de 2007

A duração da prova é de 3 horas.
Cada problema vale 1 ponto.
Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.
Você pode solicitar papel para rascunho.
Entregue apenas a folha de respostas.

01) A figura mostra dois quadrados sobrepostos. Qual é o valor de $x + y$, em graus?

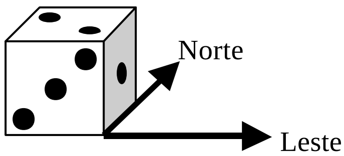


A) 270 **B)** 300 **C)** 330 **D)** 360 **E)** 390

02) Um número de quatro dígitos é dito *peroba* se possui pelo menos dois dígitos vizinhos com a mesma paridade. Quantos números *perobas* existem?
A) 8999 **B)** 8874 **C)** 7875 **D)** 8000 **E)** 7750

03) Se x é real positivo e $1 + (x^2 + x)(x^2 + 5x + 6) = 181^2$, então o valor de $x(x + 3)$ é:
A) 180 **B)** 150 **C)** 120 **D)** 182 **E)** 75

04) O desenho abaixo mostra um dado comum cujas somas das pontuações em faces opostas é sempre igual a 7. Ele é colocado em uma mesa horizontal com a face "1" voltada para Leste. O dado é, então, movido quatro vezes.



Um movimento consiste em uma rotação de 90° em relação a uma aresta. Depois do primeiro movimento a face em contato com a mesa passa a ser a "1", depois a "2", então a "3" e, finalmente, a face "5". Para que sentido está voltada a face "1" após esta seqüência de movimentos?
A) Oeste **B)** Leste **C)** Norte **D)** Sul **E)** Cima

05) Os números 72, 8, 24, 10, 5, 45, 36, 15 são agrupados em duplas de modo que o produto de cada dupla é o mesmo. Qual número fica com o 10?
A) 36 **B)** 45 **C)** 24 **D)** 15 **E)** 72

06) Tintas pretas opacas absorvem 97% da luz, refletindo o restante. Cientistas desenvolveram uma nova cobertura superpreta que é "dez vezes mais preta" que tintas pretas opacas, querendo dizer que ela reflete 1/10 da luz refletida pelas tintas pretas opacas. Que porcentagem de luz a nova cobertura absorve?
A) 9,7 **B)** 90,3 **C)** 99,7 **D)** 99,9 **E)** 970

07) Considere a seguinte seqüência:

$$27 = 3\times 3\times 3,\ 207 = 3\times 3\times 23,\ \ 2007 = 3\times 3\times 223,\ \ 20007 = 3\times 3\times 2223,\ ...$$

Qual dos seguintes inteiros é um múltiplo de 81?

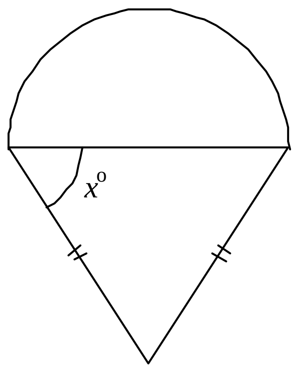
A) 200.007 **B)** 20.000.007 **C)** 2.000.000.007
D) 200.000.000.007 **E)** 20.000.000.000.007

08) Qual dos inteiros positivos abaixo satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{4}{n^4}+\frac{5}{n^4}+\frac{6}{n^4}+\cdots+\frac{n^4-6}{n^4}+\frac{n^4-5}{n^4}+\frac{n^4-4}{n^4}=309\,?$$

A) 2007 **B)** 309 **C)** 155 **D)** 25 **E)** 5

09) O desenho abaixo mostra um semicírculo e um triângulo isósceles de mesma área. Qual é o valor de $\operatorname{tg} x^\circ$?



A) 1 **B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C)** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ **D)** $\frac{2}{\pi}$ **E)** $\frac{\pi}{2}$

10) Um episódio muito conhecido na Matemática foi quando ao visitar o grande matemático Ramanujam no hospital, o outro grande matemático Hardy disse que o número do táxi que o trouxe, 1729, era um número sem graça; Ramanujam respondeu prontamente: “Não diga isso, Hardy! 1729 é o menor número inteiro positivo que pode ser escrito como soma de dois cubos perfeitos positivos de duas maneiras diferentes!” De fato, $1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$.

Um outro episódio não muito conhecido na Matemática foi quando o pequeno matemático Muralijam foi visitado pelo outro pequeno matemático Softy, que disse que o número do lotação que o trouxe era um número sem graça. Muralijam responde imediatamente: “Não, Softy, ele é o menor inteiro positivo que pode ser escrito como soma de dois quadrados perfeitos positivos de duas maneiras diferentes!”

A que número Muralijam e Softy se referem?

A) 18 **B)** 41 **C)** 45 **D)** 50 **E)** 65

11) Dizemos que uma palavra Q é *quase-anagrama* de outra palavra P quando Q pode ser obtida retirando-se uma letra de P e trocando a ordem das letras restantes, resultando em uma palavra com uma letra a menos do que P. Um quase-anagrama pode ter sentido em algum idioma ou não. Por exemplo, RARO, RACR e ARCO são quase-anagramas de CARRO.
Quantos são os quase-anagramas da palavra BACANA que começam com A?

A) 48 **B)** 60 **C)** 72 **D)** 96 **E)** 120

12) As cidades Aópolis, Beópolis e Ceópolis são ligadas por estradas retas. Sabe-se a estrada que liga Aópolis e Beópolis é perpendicular à estrada que liga Aópolis e Ceópolis. Rubens mora em Beópolis e tem um compromisso em Ceópolis. Todavia, a estrada que liga Beópolis a Ceópolis está interditada, de modo que Rubens é obrigado a fazer o trajeto Beópolis-Aópolis-Ceópolis. Para chegar ao compromisso na hora certa, Rubens trafega com uma velocidade 24% maior do que trafegaria se utilizasse a estrada interditada.

Se a é o menor ângulo do triângulo determinado pelas três estradas, então

A) $0 < \text{tg}a < \frac{1}{6}$ **B)** $\frac{1}{6} < \text{tg}a < \frac{1}{5}$ **C)** $\frac{1}{5} < \text{tg}a < \frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{4} < \text{tg}a < \frac{1}{3}$ **E)** $\frac{1}{3} < \text{tg}a < 1$

13) Todo número real a pode ser escrito de forma única como $a = \lfloor a \rfloor + \{a\}$, em que $\lfloor a \rfloor$ é inteiro e $0 \le \{a\} < 1$. Chamamos $\lfloor a \rfloor$ *parte inteira* de a e $\{a\}$ *parte fracionária* de a.

Se $x + \lfloor y \rfloor + \{z\} = 4{,}2$, $y + \lfloor z \rfloor + \{x\} = 3{,}6$ e $z + \lfloor x \rfloor + \{y\} = 2$, quanto vale $x - y + z$?

A) –1 **B)** –0,5 **C)** 0 **D)** 0,5 **E)** 1

14) Dizemos que um natural X é um *repunit* quando os seus algarismos são todos iguais a 1, ou seja, quando X é da forma 11…1.

Sejam p, q e r inteiros, $p > 0$, tais que $pX^2 + qX + r$ é um repunit sempre que X é um repunit. Qual dos valores a seguir é um possível valor de q?

A) –2 **B)** –1 **C)** 0 **D)** 1 **E)** 2

15) O conjunto dos valores de c para os quais a equação $\sqrt{x} = \sqrt{\sqrt{x} + c}$ possui solução real está contido em:

A) $[-1; \infty[$ **B)** $]-\infty; 1]$ **C)** $[-3; 2]$ **D)** $[-2; 3]$ **E)** Z

16) No triângulo ABC, AD é a altura relativa ao lado BC. Se $AB = DC = 1$, assinale a alternativa que corresponde à área máxima do triângulo ABC.

A) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ **B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E)** $\frac{1}{2}$

17) O número de pares (x, y) de inteiros positivos que satisfazem a equação

$$x^8 + 3y^4 = 4x^2y^3,$$

com $1 \le y \le 2007$, é igual a:

A) 40 **B)** 41 **C)** 42 **D)** 43 **E)** 44

18) Sejam a, b e c números tais que

$$a^2 - ab = 1$$
$$b^2 - bc = 1$$
$$c^2 - ac = 1$$

O valor de $abc \cdot (a + b + c)$ é igual a:

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** –1 **E)** –3

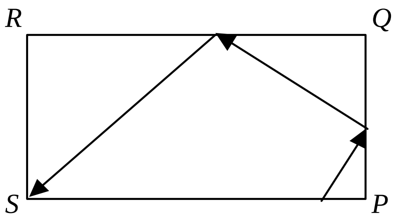
19) Uma avenida possui 100 prédios numerados de 1 a 100, onde prédios com numeração par se situam do lado direito da rua e prédios com numeração ímpar se situam no lado esquerdo. A quantidade de andares de cada prédio é igual à soma dos algarismos do número correspondente ao prédio. Assim, podemos afirmar que:
A) A quantidade de prédios com mais de 10 andares é maior do lado direito da rua.
B) A quantidade de prédios com menos de 5 andares é maior do lado direito da rua.
C) Pelo menos metade dos prédios possui 10 ou mais andares.
D) Em ambos os lados da rua há a mesma quantidade de prédios com exatos 8 andares.
E) Pelo menos 25% dos prédios possui menos de 5 andares.

20) Qual o menor perímetro inteiro possível de um triângulo que possui um dos lados com medida igual a $\frac{5\sqrt{3}}{2}$?
A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

21) Determine em qual dos horários abaixo o ângulo determinado pelos ponteiros de um relógio é o menor.
A) 02h30 **B)** 06h20 **C)** 05h40 **D)** 08h50 **E)** 09h55

22) O máximo divisor comum entre os números 1221, 2332, 3443, 4554,........, 8998 é:
A) 3 **B)** 33 **C)** 37 **D)** 11 **E)** 101

23) Uma mesa de bilhar tem dimensões de 3 metros por 6 metros e tem caçapas nos seus quatro cantos P, Q, R e S. Quando uma bola bate na borda da mesa, sua trajetória forma um ângulo igual ao que a trajetória anterior formava.



Uma bola, inicialmente a 1 metro da caçapa P, é batida do lado SP em direção ao lado PQ, como mostra a figura. A quantos metros de P a bola acerta o lado PQ se a bola cai na caçapa S após duas batidas na borda da mesa?
A) 1 **B)** $\frac{6}{7}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{5}$

24) Considere todos os números abc de três algarismos onde $b = a^2 + c^2$ e $a \neq 0$. A diferença entre o maior e o menor destes números é um número:
A) Múltiplo de 3 **B)** Primo
C) Com último algarismo igual a 7 **D)** Cuja soma dos algarismos é 10
E) Múltiplo de 7

25) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência na qual cada termo é definido como o dobro da soma dos algarismos do termo anterior, mais uma unidade. Por exemplo, se $a_n = 234$, então $a_{n+1} = 2(2 + 3 + 4) + 1$.
Se, $a_1 = 1$ o valor de $a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} + a_{35}$ é igual a:
A) 44 **B)** 54 **C)** 64 **D)** 75 **E)** 84