

35ª OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 3

1) C	6) D	11) B	16) D	21) C
2) D	7) E	12) C	17) A	22) C
3) D	8) A	13) B	18) A	23) C
4) E	9) B	14) D	19) C	24) C
5) B	10) C	15) D	20) D	25) E

- Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 3 = 25 pontos).
- Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site: www.obm.org.br

1) (C) O próximo ano cujos algarismos são 0, 1, 2, 3, em alguma ordem, é 2031, que é daqui a 18 anos.

2) (D) Comprando hoje o computador, Joana gastaria 1900 reais. Esperando o próximo dia, o preço do computador subiria para 2100 reais e ela gastaria $\frac{95}{100} \times 2100 = 1995$ reais. Assim, ela perderia 95 reais.

3) (D) A soma dos algarismos de um número menor que 100 é menor ou igual a $9 + 9 = 18$. Assim, a soma dos números bem avaliados pelo critério do aluno só pode ter sido 7 ou 14. Existem três números com tais somas: 7, 70 e 77.

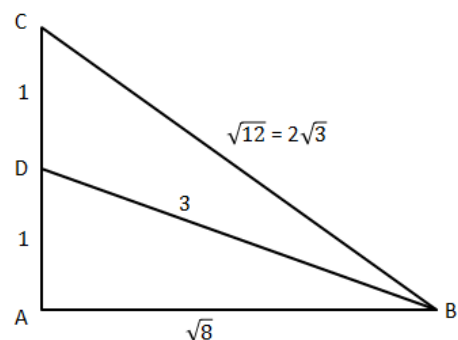
4) (E) A primeira condição nos diz que $n \geq 55$ e a segunda que $n \leq 59$. Assim, teremos no máximo 8 múltiplos de 7 quando $n = 56, 57, 58$ ou 59 .

5) (B) Temos que $2013 = 3 \times 11 \times 61$. Como o número 50 está na segunda coluna, o quadriculado retangular possui 33 linhas e 61 colunas. Assim, ao fim da 30ª coluna, escrevemos $33 \times 30 = 990$ números. Portanto, o número 1000 será escrito na 31ª coluna.

6) (D) Temos que $a^2 + ab - b^2 = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, pois a e b são reais positivos. Queremos

$$\text{calcular } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 2 = 2 + \sqrt{5}.$$

7) (E) Como $AC = 2$, temos que $AD = DC = 1$. Pelo teorema de Pitágoras no triângulo DAB , temos $AB^2 = 3^2 - 1^2 = 8$. Novamente pelo Teorema de Pitágora, agora no triângulo ABC , temos: $BC^2 = 2^2 + AB^2 = 12$.



8) (A) Note que na linha k aparecem exatamente os k ímpares que ainda não estão nas linhas anteriores e que o último número ímpar de uma linha j qualquer é o $[j.(j+1)/2]$ -ésimo ímpar. Dessa forma, temos que os k ímpares da linha k estão compreendidos no intervalo de $[(k-1).k/2 + 1]$ até $[k.(k+1)/2]$. Como 2013 é o 1007º ímpar, para encontrarmos sua linha, devemos encontrar k inteiro que satisfaça:

$$(k-1).k/2 + 1 < 1007 < k.(k+1)/2.$$

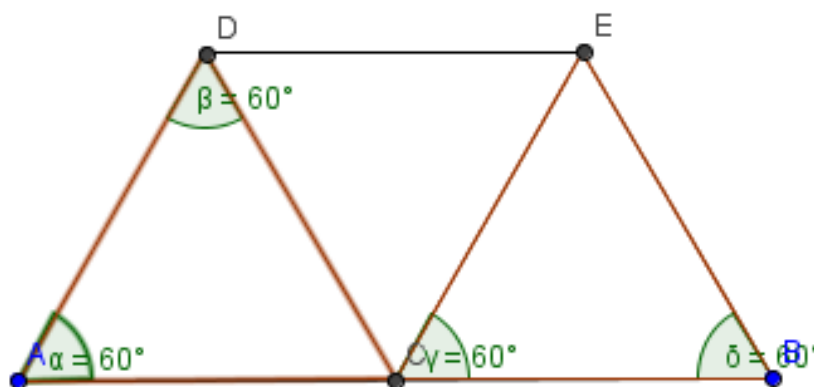
A primeira desigualdade implica que $(k-1)^2 < 2 \cdot 1006$, ou seja, $k < \sqrt{2012} + 1 < 46$. A segunda desigualdade implica que $8057/4 < (k + 1/2)^2$ e consequentemente $\sqrt{8057}/2 - 1/2 < k$. O único inteiro nesse intervalo é $k = 45$.

9) (B) Contaremos inicialmente o número de triplas ordenadas de arestas (a, b, c) do cubo, onde quaisquer duas arestas são reversas. Podemos escolher inicialmente qualquer aresta a , o que pode ser feito de 12 maneiras. Feito isso, temos 4 escolhas para b e as escolhas de a e b automaticamente determinam c . Então, há $12 \cdot 4 = 48$ triplas. Entretanto, cada tripla foi contada $3! = 6$ vezes e, portanto, a resposta pedida é $\frac{48}{6} = 8$.

10) (C) Como $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 9 + 3 \cdot 6 = 27$, podemos concluir que $x+y = \sqrt[3]{27} = 3$.

11) (B) A quantidade máxima de triângulos equiláteros é três.

Um exemplo de que esse valor pode ser atingido é:



Os triângulos ACD , CDE e BCE são equiláteros.

Suponha que haja quatro triângulos equiláteros com vértices em cinco pontos do plano, digamos A, B, C, D, E . Digamos que ABC é equilátero. Se nenhum dos triângulos que usa dois dos vértices de ABC , ou seja, $DAB, DAC, DBC, EAB, EAC, EBC$, é equilátero, devemos ter que os triângulos ADE, BDE e CDE são equiláteros. Mas com isso teríamos que

$AD = BD = CD = DE = EA = EB = EC$, o que implicaria que D e E coincidem, pois ambos seriam circuncentro do triângulo ABC . Então, um dos triângulos $DAB, DAC, DBC, EAB, EAC, EBC$ é equilátero. Digamos então que DBC é equilátero. Daí, $ABDC$ é um losango de ângulos $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$. Agora, basta notar que dentre os triângulos EAB, EAC, EBC, EBD, ECD , só pode haver no máximo um triângulo equilátero. Isso é fácil de se testar, se um é equilátero nenhum dos outros poderá ser. Logo não é possível termos quatro triângulos equiláteros.

12) (C) Como O é o centro do círculo, temos $\angle EOB = 2\angle ECB = 70^\circ$. Como $AO = OE$, pelo teorema do ângulo externo aplicado ao ângulo $\angle EOB$, temos $\angle EAO = 2\angle OEA = 35^\circ$. Daí, $\angle ADC = \angle AEC = 35^\circ$. Como $\angle ADC + \angle DAB = 90^\circ$, podemos concluir que $\angle DAE = 90^\circ - \angle ADC - \angle EAB = 20^\circ$

13) (B) Sendo t o tempo que as bolas levam para se encontrar, temos que a bola de Jade Maravilha percorreu na vertical $(vt) \cdot \text{sen} \alpha$ e que a bola de Super Esmeralda percorreu na vertical $(60t) \cdot \text{sen} 30^\circ$. Como essas distâncias são iguais, temos ter $v = 30 / \text{sen} \alpha$. Para que v seja mínimo, devemos ter o valor máximo $\text{sen} \alpha = 1$ e daí $v = 30$ km/h.

14) (D) A órbita de um número x é definida como sendo o conjunto formado pelas iterações de f , ou seja, a órbita de x é o conjunto $\{x, f(x), f(f(x)), \dots\}$. Assim, vejamos as órbitas do números de 1 a 9:

Órbita do 1: 2 elementos

Órbita do 2: 3 elementos

Órbita do 3: 3 elementos

Órbita do 4: 4 elementos

Órbita do 5: 3 elementos

Órbita do 6: 4 elementos

Órbita do 7: 4 elementos

Órbita do 8: 2 elementos

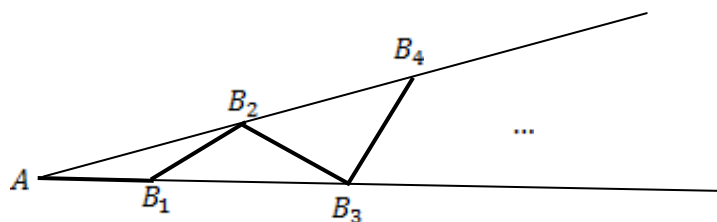
Órbita do 9: 4 elementos

Veja que se tivermos f aplicada um múltiplo da órbita de x de vezes então voltaremos a x , assim o valor desejado é um múltiplo de todas as órbitas, logo estamos interessados em $\text{mmc}(2, 3, 4) = 12$.

15) (D) As potências perfeitas de 1 a 100 que não são quadrados perfeitos são: 8, 27 e 32. Veja então que, para $1 \leq k \leq 100$, $f(k) = 8 \Leftrightarrow k = 8$, $f(k) = 27 \Leftrightarrow k = 27, 28, 29, 30, 31$ e $f(k) = 32 \Leftrightarrow k = 32, 33, 34, 35$. Logo, $f(k)$ é quadrado perfeito para

$100 - (1 + 5 + 4) = 90$ valores de k e, portanto, a probabilidade de $f(k)$ ser quadrado perfeito é de 90%.

16) (D)



Veja que se $\angle AB_2B_1 = 1^\circ$ e que, portanto, $\angle B_2B_1B_3 = \angle AB_3B_2 = 2^\circ$. Da mesma forma, $\angle AB_4B_3 = 3^\circ$. Continuando, é fácil ver que $\angle AB_nB_{n-1} = (n-1)^\circ$. Agora, no triângulo $B_nB_{n-1}B_{n-2}$, temos que $\angle B_{n-1}B_{n-2}B_n = \angle AB_nB_{n-1} = (n-1)^\circ$. Logo, $2n-2 < 180 \Rightarrow n < 91$ e daí o maior valor possível de n é 90.

17) (A) Se a pulga P_1 deu k_1 saltos e a pulga P_2 deu k_2 saltos, temos: $k_1m = k_2n = 100$. Logo, m e n são divisores de 100. Como elas se encontram pela primeira vez em 1 metro, então $\text{mmc}(m, n) = 100 = 2^2 \cdot 5^2$, logo $5^2 | n$ ou $5^2 | m$. Se $5^2 \nmid n$ então necessariamente $5^2 | m \Rightarrow n \leq 20 < 25 \leq m$, contrariando $n > m$. Logo, $5^2 | n \Leftrightarrow n = 25, 50$ ou 100 . Para $n = 100$, m pode ser qualquer um dos outros 8 divisores de 100. Para $n = 25$ ou $n = 50$, temos que $4 | m$, logo $m = 4$ ou $m = 20$. No total, teremos: $8 + 2 \cdot 2 = 12$

18) (A) Como cada caixa deve ter um número diferente de bolas brancas e há 10 bolas brancas para 5 caixas, haverá necessariamente uma caixa com nenhuma bola branca, uma com 1 bola branca, uma com 2 bolas brancas, uma com 3 bolas brancas e outra com 4 bolas brancas. Então, basta distribuímos as bolas vermelhas nas 5 caixas restantes. Chamemos de caixa i a caixa que está com i bolas brancas no momento. Se a caixa i receber x_i bolas vermelhas, devemos ter $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$, onde x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 são inteiros não-negativos e $x_0 \geq 1$. Faça $x_0 = y_0 + 1$, de forma que agora estamos interessados no número de soluções inteiras não-negativas de $y_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$. Fazendo uma bijeção das soluções dessa equação com o número de permutações de 7 bolinhas e 4 palitinhos, temos $\binom{11}{4} = 330$ maneiras de distribuir as bolas.

19) (C) Como $3^2 < 10$, temos $3^{400} = (3^2)^{200} < 10^{200}$. Além disso, como $3^4 = 81 > 2^3 \cdot 10$, também temos $3^{400} = (3^4)^{100} > (2^3 \cdot 10)^{100} = 2^{300} \cdot 10^{100}$. Note que $2^4 = 16 > 10$, e assim $3^{400} = 2^{300} \cdot 10^{100} = (2^4)^{75} \cdot 10^{100} > 10^{175}$. Daí, podemos concluir que 3^{400} possui entre 175 e 200 dígitos.

20) (D) Temos que $a^2 + b + c = b^2 + c + a \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1) = 0$. Então, $a = b$ ou $a + b = 1$. Da mesma forma, $a = c$ ou $a + c = 1$ e $b = c$ ou $b + c = 1$. Note que não podemos

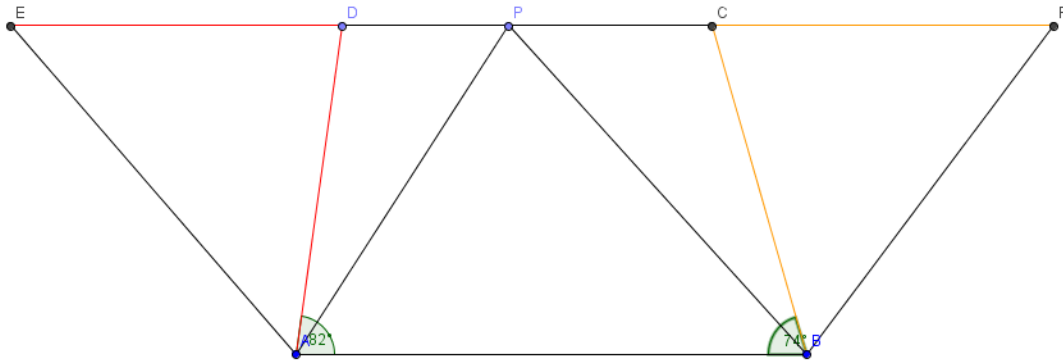
ter simultaneamente $a + b = 1, a + c = 1, b + c = 1$ (pois a, b, c são inteiros). Então, podemos supor sem perdas que $a = b$. Agora, temos dois casos a considerar: $a = b = c$ ou $a = b$ e $c = 1 - a$.

No primeiro caso, $k = a^2 + 2a \Leftrightarrow k + 1 = (a + 1)^2$. Então, estamos interessados na quantidade de quadrados perfeitos de 2 a 2013, pois $1 \leq k \leq 2012$. Como $44^2 < 2013 < 45^2$, temos 44 quadrados perfeitos de 1 a 2013. Como 1 é quadrado perfeito e deve ser descontado, temos 43 quadrados perfeitos de 2 a 2013. Logo, há 43 valores possíveis para k .

No segundo caso, $k = a^2 + 1$. Como não há dois quadrados perfeitos diferindo de 2, não há interseções entre o primeiro caso e o segundo. Aqui, estamos interessados na quantidade de quadrados perfeitos de 0 a 2011. Agora, há 45 possíveis valores para k .

Logo, o total de valores é $45 + 43 = 88$.

21) (C) Considere a seguinte figura:



Os pontos E e F pertencem a reta CD e são tais que $DE = DA$ e $CB = CF$. Como $PC + CB = AB$ e $AD + DP = AB$, temos que $EP = PF = AB$ e então como CD é paralelo a AB , temos que $EPAB$ e $PFAB$ são paralelogramos. Temos que $\angle ADE = 82^\circ$ e, como $\triangle ADE$ é isósceles de base AE , $\angle DEA = \angle PBA = 49^\circ$. Da mesma forma, $\triangle FCB$ isósceles e $\angle FCB = 74^\circ$, então $\angle PFB = \angle PAB = 53^\circ$. Daí, $\angle APB = 180^\circ - 49^\circ - 53^\circ = 78^\circ$.

22) (C) Sejam A o conjunto dos números de quatro algarismos distintos que possuem 4 nos milhares, B o conjunto dos números de quatro algarismos distintos que possuem 3 nas centenas, C o conjunto dos números de quatro algarismos distintos que possuem 2 nas dezenas e D o conjunto dos números de quatro algarismos distintos que possuem 1 nas unidades. A quantidade descrita no problema é $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 - n(A \cup B \cup C \cup D)$, lembrado que para um número ter 4 algarismos não pode ter dígito dos milhares 0.

Pelo Princípio da Inclusão – Exclusão, temos que

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C \cup D) &= n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - \\ &n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) \\ &+ n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D) \end{aligned}$$

Contando os números, tem-se $n(A) = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ e $n(B) = n(C) = n(D) = 8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$. Também temos $n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(A \cap D) = 8 \cdot 7 = 56$ e $n(B \cap C) = n(B \cap D) = n(C \cap D) = 7 \cdot 7 = 49$.

Ainda, $n(A \cap B \cap C) = n(A \cap B \cap D) = n(A \cap C \cap D) = 7$ e $n(B \cap C \cap D) = 6$.

Por fim, $n(A \cap B \cap C \cap D) = 1$, apenas o número 4321.

Logo, $n(A \cup B \cup C \cup D) = (504 + 3 \cdot 448) - (3 \cdot 56 + 3 \cdot 49) + (3 \cdot 7 + 6) - 1 = 1559$.

Daí, a quantidade é $4536 - 1559 = 2977$, que se encaixa no item C.

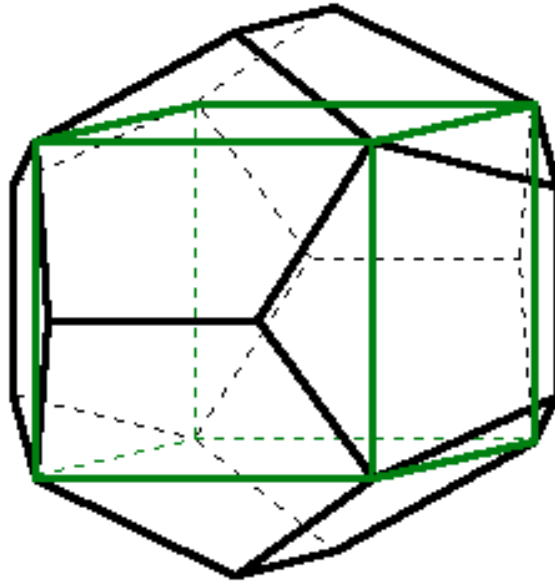
23) (C) A equação dada é equivalente a $x(x + 2013 \cdot 2012) = 2013^y$. Veja que $2013 \mid x(x + 2013 \cdot 2012) \Rightarrow 2013 \mid x^2 \Rightarrow 2013 \mid x$, pois $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ é livre de quadrados. Fazendo então $x = 2013k$, temos $2013^2 k(k + 2012) = 2013^y \Leftrightarrow k(k + 2012) = 2013^{y-2} (y > 2)$. Se $y = 3$, temos $k = 1$, o que nos dá uma solução. Suponhamos agora $y > 3$ e daí se $d \mid k$ e $d \mid k + 2012$, teríamos $d \mid 2012$, o que nos dá $d = 1$, pois 2012 e 2013 são primos entre si. Logo, podemos escrever $k = a^{y-2}$ e $k + 2012 = b^{y-2}$, onde a e b são inteiros positivos tais que $ab = 2013$. Então, $b^{y-2} - a^{y-2} = 2012$. Temos que $b^{y-2} - a^{y-2}$ é função crescente de y e, portanto, $2012 \geq b^2 - a^2$, com $ab = 2013$. Temos poucas possibilidades para a e b : podemos ter $(a, b) = (1, 2013), (3, 671), (11, 183), (33, 61)$. Em todos os casos, temos que $b^2 - a^2 > 2012$, contradição. Portanto, $y = 3$ de fato.

24) (C) Como $p(x)$ é par, p possui apenas monômios de grau par, ou seja, podemos escrever $p(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \dots + a_2x^2 + a_0$ (isto pode ser demonstrado através da identidade polinomial $p(x) = p(-x)$), onde $a_{2n}, a_{2n-2}, \dots, a_0 \geq 0$

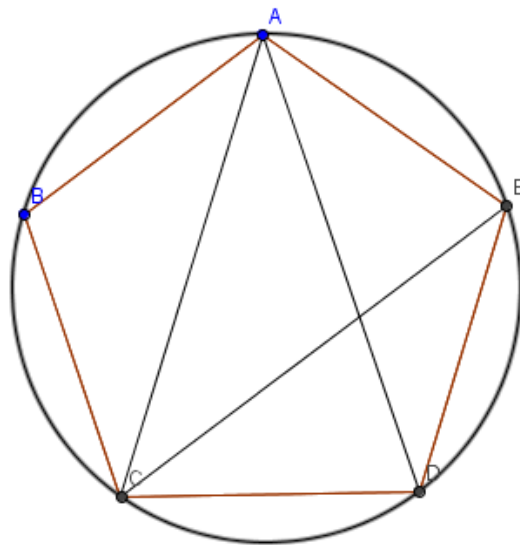
Então, para $x \geq 0$, veja que p é função crescente de x , pois é soma de funções crescentes e da mesma forma, para $x < 0$, p é função decrescente de x , pois é soma de funções decrescentes.

Daí, $p(x) = k$ pode ter no máximo duas soluções (uma não-negativa e outra negativa). Para $p(x) = x^2$ e $k = 1$, temos a igualdade, pois as soluções de $p(x) = k$ são $x = 1$ ou $x = -1$.

25) (E) Considere a seguinte figura:



Temos que a aresta do cubo é a diagonal de um pentágono regular de lado 1 (todas as diagonais de um pentágono regular são congruentes).



Sendo $AD = AC = CE = x$, temos pelo teorema de Ptolomeu no quadrilátero $AEDC$ que $x^2 = x + 1$, logo $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ é a raiz positiva da equação. O volume do cubo é $x^3 = x^2 + x = 2x + 1$. Substituindo, o volume do cubo é $2 + \sqrt{5}$.