XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte A

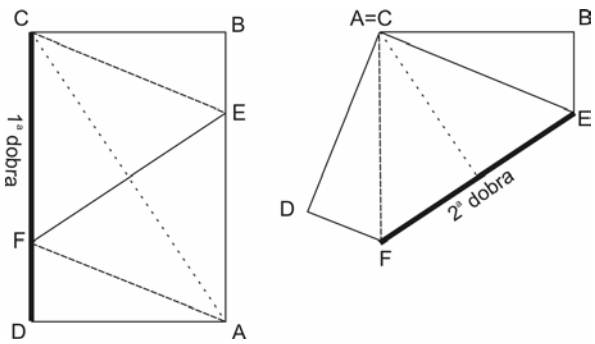
CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos 5 **pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 30. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

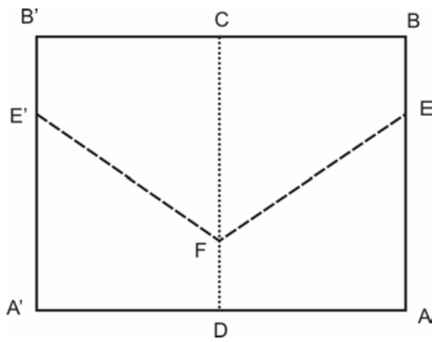
Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Resposta	41	150	81	258	148	64

1. **[41]** O número é formado por blocos iguais, de 5 algarismos na forma “10100”. Como o número tem 101 algarismos, concluímos que é formado por 20 desses blocos inteiros mais o primeiro algarismo de um bloco, que é 1. A soma dos algarismos de cada bloco é 1 + 0 +1 + 0 + 0 = 2, portanto a soma dos algarismos de N é $20\times 2+1=41$.

2. **[150]** O desenho abaixo à esquerda mostra como fica a folha após a primeira dobra. À direita, mostra como fica a folha após as duas dobras.



Observamos que $CE = EA$ e que $CF = FA$. Por uma propriedade da dobra, sabemos que o segmento FE é perpendicular ao segmento AC e esses segmentos se cruzam em seus pontos médios. Portanto, os quatro triângulos que compõem o quadrilátero $AECF$ são congruentes; são congruentes também os triângulos EBC e FDA. Portanto, a dobra FE divide o retângulo $ABCD$ em dois trapézios, $EBCF$ e $AEFD$, de mesma área. Desdobrando inteiramente a folha, obtemos duas metades iguais. Portanto, a área do pentágono convexo $BEFE'B'$ é igual à área do pentágono não convexo $AA'E'FE$, ou seja, a área da parte escura é metade da área da folha, portanto igual a $\frac{15\times 20}{2}=150\text{ cm}^2$.

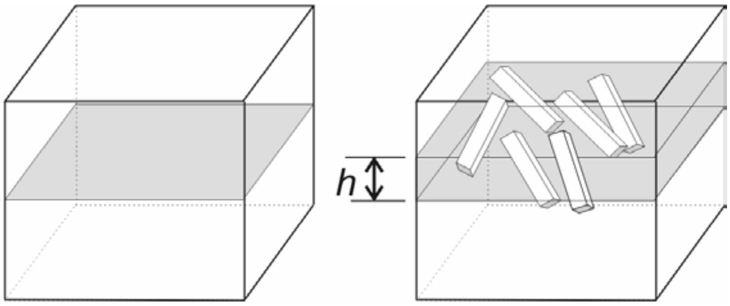


3. **[81]** Pelo padrão observado, as somas são iguais ao quadrado da parcela central (aquela cujo número de parcelas à esquerda é igual ao número de parcelas à direita).

   Portanto, $A = 2007^2$ e, assim, $\dfrac{A}{223^2} = \dfrac{2007^2}{223^2} = \left(\dfrac{2007}{223}\right)^2 = 9^2 = 81$.

4. **[258]** O retângulo que sobra após os cortes tem lados iguais às metades dos lados da cartolina original, cujo perímetro, então, é o dobro do perímetro desse retângulo. Logo, o perímetro da cartolina antes do corte é $129 \times 2 = 258$ cm.

5. **[148]** O volume de cada bloco de madeira é $0,2 \times 0,3 \times 1,60 = 0,096\ \text{m}^3$; o volume de cada bloco que fica submerso no líquido é $0,80 \times 0,096\ \text{m}^3$. O volume de líquido deslocado pelos 25 blocos é igual a $25 \times 0,80 \times 0,096 = 1,92\ \text{m}^3$. Como o reservatório é um cubo de 2 m de lado, sua base é um quadrado de área 4 m^2. Podemos pensar no líquido deslocado como se fosse um bloco cuja base é igual à base do reservatório, de altura h e volume acima.



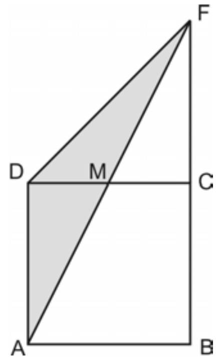
   Portanto $4h = 1,92 \Leftrightarrow h = \dfrac{1,92}{4} = 0,48\ \text{m} = 48\ \text{cm}$. Como a altura inicial do líquido era 100 cm, a nova altura será 148 cm.

6. **[64]** À primeira inspeção, podemos admitir que os três algarismos à direita de todos os números estão corretos, isto é, estão corretamente escritos os algarismos 0, 1, 3, 4, 5, 6 e 8. Portanto, dentre os algarismos 2, 7 e 9, um **deles** está escrito incorretamente. O 9 está escrito corretamente, pois se o mudarmos, a soma com 2 não estará certa. Logo ou 2 ou 7 está errado. Se o 7 estiver errado, então 2 estará correto, mas isso não é possível pois a soma de 2 com 4 mais 1 não estaria certa. Logo, o 2 é que deve ser substituído; olhando novamente a soma de 2 com 4 mais 1 resultando 1 vemos que o resultado só dará certo se no lugar de 2 colocarmos 6. Fazendo a substituição, verificamos que o resto se encaixa. Teremos, então, $a^b = 2^6 = 64$.

$$\begin{array}{r} 746586 \\ +\,869430 \\ \hline 1616016 \end{array}$$

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte B

1. Temos $m(F\hat{M}C) = m(A\hat{M}D)$ (ângulos opostos pelo vértice), $m(A\hat{D}M) = m(F\hat{C}M)$ (pois $ABCD$ é quadrado, logo esses ângulos são retos) e $MC = MD$ (pois M é ponto médio de CD). Logo, os triângulos AMD e FMC são congruentes.



a) Vemos que a área $\Delta ABF =$ área $\Delta FMC +$ área $ABCM$.
   Como área $\Delta FMC =$ área ΔAMD , temos:
   área $\Delta ABF =$ área $\Delta AMD +$ área $ABCM$ = área do quadrado $ABCD$ = 300 cm^2.
b) área $\Delta ADF =$ área $\Delta AMD +$ área $\Delta DMF =$ área $\Delta FMC +$ área $\Delta DMF =$ área ΔFCD
   Como $AD = FC$, CD é lado comum e os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são retos, concluímos que os triângulos FCD e ADC são congruentes, logo área $\Delta FCD =$ área $\Delta ADC = \dfrac{\text{área } ABCD}{2}$.
   Portanto, a área do triângulo ADF é igual a $\dfrac{300}{2} = 150 \text{ cm}^2$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
Item a) [5 pontos]
• Mostrou que a área $\Delta ABF =$ área $\Delta FMC +$ área $ABCM$: **[3 pontos]**
• Concluiu que a área $\Delta ABF =$ área $\Delta AMD +$ área $ABCM$ = área $ABCD$: **[2 pontos]**
Item b) [5 pontos]
• Mostrou que a área $\Delta ADF =$ área ΔFCD: **[2 pontos]**
• Concluiu que a área $\Delta FCD =$ área $\Delta ADC = \dfrac{\text{área } ABCD}{2}$: **[2 pontos]**
• Finalizou corretamente, e obteve área do triângulo $ADF = \dfrac{300}{2} = 150 \text{ cm}^2$: **[1 ponto]**

As pontuações a seguir não se acumulam com as demais nem entre si.
• Provou que triângulos AMD e FMC são congruentes: **[2 pontos]**
Observação: o aluno não perde ponto se não colocar ou errar a unidade de área.

2. Dadas as massas de 1 a 6, podemos adicionar 1 a 6, 2 a 6, etc, até obter todos os pesos de 7 a 11; podemos adicionar 1 + 5 a 6, 2 + 5 a 6, etc, até obter todos os pesos de 12 a 15; podemos adicionar 1 + 4 + 5 a 6, etc, obtendo os pesos de 16 a 18; somando 1 + 3 + 4 + 5 a 6 obtemos 19; 2 + 3 + 4 + 5 a 6 obtemos 20 e, finalmente, somando 1 + 2 + 3 + 4 + 5 a 6 obtemos 21. Portanto, a quantidade de massas diferentes que Esmeralda pode obter é 21.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
• Mostrou uma maneira de organizar e obter as 5 somas com duas massas: **[1 ponto]**
• Mostrou uma maneira de organizar e obter as 5 somas com 2 massas e as 4 somas com 3 massas: **[4 pontos]**
• Mostrou uma maneira de organizar e obter as 5 somas com 2 massas, as 4 somas com 3 massas e as 3 somas com 4 massas: **[6 pontos]**
• Mostrou uma maneira de organizar e obter as 5 somas com 2 massas, as 4 somas com 3 massas, as 3 somas com 4 massas e as 2 somas com 5 massas: **[8 pontos]**
• Mostrou uma maneira de organizar e obter as 21 somas: **[10 pontos]**

As pontuações a seguir não se acumulam com as demais nem entre si.
• Mostrou uma maneira de organizar e obter as 5 somas com duas massas: **[1 ponto]**
• Mostrou uma maneira de organizar e obter as 4 somas com 3 massas: **[2 pontos]**
• Mostrou uma maneira de organizar e obter as 3 somas com 4 massas: **[2 pontos]**
• Mostrou uma maneira de organizar e obter as 2 somas com 5 massas: **[2 pontos]**

3. Pode-se concluir, examinando a tabela, que a soma dos elementos da diagonal n é igual a $2n + (n - 1)k$, onde k é o algarismo das unidades do número n. Por exemplo, na diagonal de número 4 a soma dos números é $2\cdot 4+(4-1)\cdot 4=20$, na diagonal de número 10 a soma dos números é $2\cdot 10+(10-1)\cdot 0=20$, etc.

a) Na diagonal de número 9, a soma dos elementos é $2\cdot 9+(9-1)\cdot 9=90$. De outra forma, na diagonal 9 há 10 números 9; portanto a soma é $10\cdot 9=90$.

b) Na diagonal 2007 a soma será $2\cdot 2007+(2007-1)\cdot 7=4014+14042=18056$.
O resto da divisão desse número por 100 é 56.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
Item a) [3 pontos]
• Mostrou que a soma dos elementos é $2\cdot 9+(9-1)\cdot 9=90$: **[3 pontos]**
• Qualquer valor diferente de 90: **[0 ponto]**
Item b) [7 pontos]
• Percebeu que os elementos que não estão nas pontas da diagonal 2007 são todos 7: **[3 pontos]**
• Mostrou que a soma dos elementos da diagonal 2007 é $2\cdot 2007+2006\cdot 7$: **[3 pontos]**
• Concluiu que a soma dos elementos na diagonal 2007 é 18056: **[1 pontos]**
• Disse que a soma dos elementos da diagonal 2007 é 2008 vezes 2007: **[0 ponto]**

As pontuações a seguir não se acumulam com as demais nem entre si.
• Percebeu que os elementos que não estão nas pontas da diagonal n são o algarismo da unidade do número n: **[2 pontos]**
• Mostrou, de alguma forma, que a soma dos elementos da diagonal n é $2n+(n-1)k$: **[4 pontos]**