XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **4 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 20. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	17	3024	1500	30	62

01. Seja a fatoração de $123456 = 2^6 \cdot 3 \cdot 643$ e seja d um de seus divisores menores do que 2007. Podemos analisar dois casos:

- d não é múltiplo de 643: então d é um divisor de $2^6 \cdot 3 = 192 < 2007$. Portanto podemos contar todos os divisores de 192, que são $(6+1)(1+1) = 14$ divisores.

- d é múltiplo de 643: $1 \cdot 643 = 643$, $2 \cdot 643 = 1286$ e $3 \cdot 643 = 1929$ são menores que 2007, mas a partir de $4 \cdot 643 = 2572$, eles são maiores que 2007. Portanto há 3 divisores neste caso.

Portanto o total de divisores d de 123456 menores do que 2007 é 14 + 3 = 17.

02. Seja B o conjunto dos pontos de A cuja distância à origem é menor do que $5/3$ e seja $P = (x; y)$ um ponto de B. Sabe-se que P está sobre o segmento $x + y = 2; x, y \geq 0$ e que a distância $\sqrt{x^2 + y^2}$ de P à origem é menor ou igual a $5/3$. Portanto:

$$\left|\begin{array}{l} x+y=2 \\ x^2+y^2 \leq \left(5/3\right)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} y=2-x \\ x^2+4-4x+x^2 \leq \dfrac{25}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} y=2-x \\ 2x^2-4x+\dfrac{11}{9} \leq 0 \end{array}\right.$$

As raízes de $2x^2 - 4x + \frac{11}{9} = 0$ são $x_0 = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 8\frac{11}{9}}}{4} = 1 \pm \dfrac{\sqrt{14}}{6}$,que nos dá os pontos extremos $P_1 = \left(1 - \dfrac{\sqrt{14}}{6}; 1 + \dfrac{\sqrt{14}}{6}\right)$ e $P_2 = \left(1 + \dfrac{\sqrt{14}}{6}; 1 - \dfrac{\sqrt{14}}{6}\right)$ de B. Pela inequação, temos que os pontos de B estão na reta $x + y = 2$, delimitados pelos pontos P_1 e P_2, logo B é o segmento de reta $\overline{P_1P_2}$.

Queremos a probabilidade p de escolher um ponto do conjunto A estar contido no segmento $\overline{P_1P_2}$, que é a razão entre P_1P_2 e o comprimento de A. Como A está delimitado pelos pontos $(0;2)$ e $(2;0)$, seu comprimento vale $\sqrt{(0-2)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$. O comprimento de B vale

$$\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{14}}{6}-1+\frac{\sqrt{14}}{6}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{14}}{6}-1-\frac{\sqrt{14}}{6}\right)^2}=\sqrt{2\left(\frac{\sqrt{14}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{7}}{3}, \text{ portanto } p=\frac{\frac{2\sqrt{7}}{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{6} \text{ e}$$

$$2^5 3^5 p^2 = 2^5\cdot 3^5\cdot\frac{14}{36}=2^4\cdot 3^3\cdot 7=3024.$$

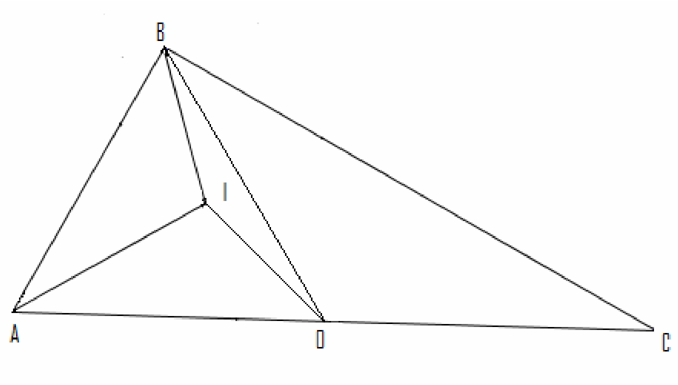
03. Inicialmente, temos $\underbrace{11\ldots1}_{1000\text{ uns}}=\frac{\overbrace{99\ldots9}^{1000\text{ noves}}}{9}=\frac{10^{1000}-1}{9}$. Portanto $\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{1000\text{ uns}}}=\sqrt{\frac{10^{1000}-1}{9}}$.

Com isso, observando que $\sqrt{\frac{10^{1000}-1}{9}}=\sqrt{\frac{(10^{500}-1)(10^{500}+1)}{9}}>\sqrt{\frac{(10^{500}-1)(10^{500}-1)}{9}}=\frac{10^{500}-1}{3}$

e $\sqrt{\frac{10^{1000}-1}{9}}<\sqrt{\frac{10^{1000}}{9}}=\frac{10^{500}}{3}$, temos $\frac{10^{500}-1}{3}<\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{1000\text{ uns}}}<\frac{10^{500}}{3}$.

Como $\frac{10^{500}-1}{3}$ é inteiro e seu consecutivo, $\frac{10^{500}+2}{3}$, é maior do que $\frac{10^{500}}{3}$, o inteiro mais próximo de $\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{1000\text{ uns}}}$ é $\frac{10^{500}-1}{3}=\frac{\overbrace{99\ldots9}^{500\text{ noves}}}{3}=\underbrace{33\ldots3}_{500\text{ noves}}$, cuja soma dos dígitos é $3\cdot 500=1500$.

04. O triângulo *ABC* é retângulo em *B*. Sejam *I* o centro da circunferência inscrita em *ABC* e *O* o ponto médio do lado *AC*. Se $\angle AOI = 45°$, quanto mede, em graus, o ângulo $\angle ACB$?
Solução:



Como *ABC* é um triângulo retângulo, então *AO* = *BO* = *CO*. Se $\angle ABI = \angle AOI = 45^o$ e $\angle BAI = \angle OAI$, então $\Delta ABI \equiv \Delta AOI$ (ALA). Com isso, *AB* = *AO* = *BO*, e portanto, triângulo *ABO* é eqüilátero. Assim, $\angle ACB = 30^o$.

05. Vamos começar colorindo a primeira linha de vértices. Cada coloração dessa linha é uma seqüência de letras “A” e “V”, por exemplo, A V V A V. Observe que, uma vez colorida a primeira linha, se aparecerem duas letras consecutivas iguais, o restante dos vértices do tabuleiro já estão determinados. De fato, ao aparecer dois V’s consecutivos, os dois vértices imediatamente abaixo deles deverão ser coloridos com dois A’s, os que estão mais abaixo deverão ter dois V’s, e assim por diante. Isto completa a coloração dessas duas colunas. Dessa forma, cada coluna vizinha também estará determinada, pois em cada retângulo teremos três vértices previamente coloridos, o que obriga o quarto vértice a ter sua cor determinada. Então, para cada seqüência de A’s e V’s na primeira linha que contém pelo menos duas letras iguais consecutivas, há exatamente uma maneira de colorir o tabuleiro. Como há $2^5 - 2 = 30$ de tais seqüências, contamos 30 colorações possíveis.

A	V	V	A	V
	A	A		
	V	V		
	A	A		
	V	V		

Falta-nos analisar um segundo caso, em que não há duas letras consecutivas iguais na primeira linha. Há duas possibilidades de seqüências: começando com A ou começando com V.

A	V	A	V	A
V				

Para cada uma dessas seqüências, há duas maneiras de escolhermos a primeira letra da segunda linha. Uma vez escolhida esta letra, a segunda linha inteira também estará determinada. Para a primeira letra da terceira linha também há 2 possibilidades. Com este raciocínio, cada vez que escolhemos a primeira letra de uma linha, determinamos a coloração desta linha. Logo, como há duas maneiras de escolhermos a primeira letra de cada linha, há $2^5 = 32$ maneiras de colorirmos o tabuleiro, neste segundo caso. Logo, o total de colorações é igual a $30 + 32 = 62$.

Observação: Veja que, no caso geral, para um quadrado $n \times n$, o raciocínio é análogo. No primeiro caso, teremos $2^{n+1} - 2$ colorações; no segundo caso, mais 2^{n+1}. Logo, teremos $2 \cdot 2^{n+1} - 2 = 2^{n+2} - 2$ colorações.

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Uma solução:

Multiplicando a equação dada por 2, obtemos $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 4y = 0$, ou ainda,

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) + (x^2 - 2xy + y^2) = 8.$$

Daí, $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (x - y)^2 = 8$. A única maneira de escrevermos 8 como a soma de três quadrados é $8 = 0 + 4 + 4$, em alguma ordem. Logo $(x - 2, y - 2) = (0, 2), (2, 0)$ ou $(2, 2)$, de onde concluímos que as soluções são $(x, y) = (2, 4), (4, 2)$ ou $(4, 4)$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
- Reescreveu a equação dada como uma soma de quadrados igual a 8 ou a uma outra constante: **[4 pontos]**
- Identificou as possibilidades para esta soma: **[até 3 pontos]** (atribuir **1 ponto** para cada caso)
- Concluiu a solução corretamente: **[3 pontos]**

As pontuações a seguir não se acumulam com as demais nem entre si.
- Testou casos particulares: **[0 ponto]**
- Provou que x e y são ambos pares: **[3 pontos]**
- Verificou que os pares (2, 4), (4, 2) e (4, 4) são soluções: **[1 ponto]**

Outra solução:

Escrevendo a equação dada como uma equação do segundo grau em x, temos:

$$x^2 - (y + 2)x + (y^2 - 2y) = 0.$$

O discriminante desta equação é $\Delta = (y + 2)^2 - 4(y^2 - 2y) = -3y^2 + 12y + 4$. Resolvendo a inequação $\Delta \geq 0$, ainda obtemos $2 - \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \leq y \leq 2 + \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Como y é inteiro positivo, as únicas possibilidades são $y = 1, 2, 3$ ou 4.

- Se $y = 1$, ficamos com $\Delta = 13$, que não é quadrado perfeito. Logo, este caso não tem solução.
- Se $y = 2$, obtemos $\Delta = 16$ e $x = \frac{4 \pm 4}{2} = 0$ ou 4. Como x é inteiro positivo, a única solução neste caso é $(x, y) = (4, 2)$.
- Se $y = 3$, ficamos com $\Delta = 13$, absurdo!
- Se $y = 4$, obtemos $\Delta = 4$. Neste caso, $x = \frac{6 \pm 2}{2} = 2$ ou 4. Logo, $(x, y) = (2, 4)$ ou $(4, 4)$.

Portanto, o conjunto solução é $\{(2, 4), (4, 2), (4, 4)\}$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
- Escreveu a equação dada como equação do segundo grau em uma das variáveis: **[2 pontos]**
- Calculou o discriminante e resolveu a inequação $\Delta \geq 0$ corretamente: **[3 pontos]**
- Concluiu a solução, analisando cada caso correspondente aos valores de y (ou x): **[5 pontos]**

(**OBS:** Caso o aluno não analise corretamente todos os casos, como descrito neste critério, atribuir **1 ponto** para cada caso analisado corretamente).
As pontuações a seguir não se acumulam com as demais nem entre si.
- Testou casos particulares: **[0 ponto]**
- Provou que x e y são ambos pares: **[3 pontos]**
- Verificou que os pares (2, 4), (4, 2) e (4, 4) são soluções: **[1 ponto]**

Mais uma solução:
Observe que $8(x + y) = 4x^2 - 4xy + 4y^2 = (x + y)^2 + 3(x - y)^2 \geq (x + y)^2$, de modo que

$$8(x + y) \geq (x + y)^2, \text{ ou seja, } x + y \leq 8.$$

Além disso, note que $x^2 - xy + y^2 = 2(x + y)$ é par, e portanto ao menos uma das parcelas do primeiro membro é par (se todos forem ímpares, $x^2 - xy + y^2$ é ímpar), o que implica que x ou y é par. Suponha, sem perda de generalidade, que x é par. Então $y^2 = 2(x + y) + xy - x^2$ é par e, assim, y também é par.

Logo, dos dois fatos acima, conclui-se que as únicas possibilidades para os pares (x, y) são (2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4) e (6, 2). Substituindo os pares, vemos que as únicas soluções são (2, 4), (4, 2) e (4, 4).

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
- Provou que $x + y \leq 8$: **[3 pontos]**
- Provou que x e y são ambos pares: **[3 pontos]**
- Listou e testou as possibilidades de pares (x, y): **[4 pontos]**

A pontuação a seguir não se acumula com as demais.
- Testou casos particulares: **[0 ponto]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:
Seja k inteiro positivo tal que $k^2 = n + 1$.

Primeiro, notemos que o algarismo das unidades dos quadrados perfeitos são 0, 1, 4, 5, 6 e 9, de modo que B é igual a 9, 3, 4, 5 ou 8.

Porém, podemos eliminar alguns casos:
- Se $B = 9$, pois nesse caso $k^2 = AAABBB + 1$ terminaria com exatamente três zeros (note que A não pode ser igual a 9, pois é diferente de B);

• Se B = 3, k^2 terminaria com 34, e seria par e não múltiplo de 4, já que os dois últimos algarismos de todo múltiplo de 4 formam outro múltiplo de 4, um absurdo.
• Se B = 4, k^2 terminaria com 45, e seria múltiplo de 5 mas não de 25, já que os dois últimos algarismos de um múltiplo de 25 são 25, 50, 75 ou 00. Outro absurdo.

Sobram somente os casos B = 5 e B = 8.

Observe que $n = k^2 - 1 = (k - 1)(k + 1) = AAABBB = 111(1000A + B)$ é múltiplo de $111 = 3\cdot 37$ e, portanto, os primos 3 e 37 dividem k + 1 ou k – 1, de modo que k é da forma $111x \pm 1$ ou $111x \pm 38$. Além disso, $111556 \le k^2 < 1000000 \Rightarrow 300 < k < 1000$, de modo que $3 \le x \le 9$.

• $k = 111x \pm 1$: Temos $AAABBB = k^2 - 1 = 111^2 x^2 \pm 222x \Leftrightarrow 1000A + B = 111x^2 \pm 2x$. O dígito das unidades de $1000A + B$ é B. Note que $111x^2 \pm 2x = 2(55x^2 \pm x) + x^2$ tem a mesma paridade que x. Assim, se B = 5, x é ímpar, ou seja, é 3, 5, 7 ou 9. Se x = 3, 5, 7, 9, o algarismo das unidades de $111x^2 + 2x$ é 5, 5, 3, 9, respectivamente, de modo que x = 3 ou x = 5, para o qual $1000A + B$ iguala $111\cdot 9 + 6 = 1005$ e $111\cdot 25 + 10 = 2785$, o que gera a solução x = 3, A = 1 e n = 111555. Além disso, se x = 3, 5, 7, 9, o algarismo das unidades de $111x^2 - 2x$ é 3, 5, 5, 3, respectivamente, de modo que as únicas possibilidades são x = 5 ou x = 7, para os quais $1000A + B$ iguala 2765 e $111\cdot 49 - 14 = 5425$ respectivamente, o que também não é possível.

Se B = 8, x é par, ou seja, é 4, 6 ou 8. Se x = 4, 6, 8, o algarismo das unidades de $111x^2 + 2x$ é 4, 8, 0, respectivamente, de modo que obtemos x = 6 e $1000A + B = 111\cdot 36 + 12 = 4008$, ou seja, A = 4. Obtemos assim a solução n = 444888. Além disso, se x = 4, 6, 8, o algarismo das unidades de $111x^2 - 2x$ é 8, 4, 8 respectivamente, de modo que obtemos x = 4 ou x = 8, para os quais $1000A + B$ igual a $111\cdot 16 - 8 = 1768$ e $111\cdot 64 - 16 = 7088$, respectivamente, o que não é possível.

• $k = 111x \pm 38$: Temos $AAABBB = k^2 - 1 = 111^2 x^2 \pm 2\cdot 111\cdot 38x + 38^2 - 1 \;= 111^2 x^2 \pm 111\cdot 76x$ $+ 37\cdot 39 = 111(111x^2 \pm 76x + 13) \Leftrightarrow 1000A + B = 111x^2 \pm 76x + 13$. Estudemos, como no caso anterior, o dígito das unidades de $111x^2 \pm 76x + 13$. Se B = 5, x é par, ou seja, é igual a 4, 6 ou 8. Se x = 4, 6, 8, o algarismo das unidades de $111x^2 + 76x + 13$ é 3, 5, 5, respectivamente, de modo que x = 6 ou 8, para os quais $1000A + B$ iguala respectivamente $111\cdot 36 + 76\cdot 6 + 13 = 4465$ e $111\cdot 64 + 76\cdot 8 + 13 = 7725$, nenhum dos dois gerando solução. Além disso, se x = 4, 6, 8, o algarismo das unidades de $111x^2 - 76x + 13$ é 5, 3, 9, respectivamente, de modo que x = 2 e $1000A + B$ igual a $111\cdot 16 - 76\cdot 4 + 13 = 1485$, o que não é possível.

Se B = 8, x é ímpar, ou seja, é igual a 3, 5, 7 ou 9. Se x = 3, 5, 7, 9 o algarismo das unidades de $111x^2 + 76x + 13$ é 0, 8, 4, 8, respectivamente, de modo que x = 5 ou x = 9, para os quais $1000A + B = 111\cdot 25 + 76\cdot 5 + 13 = 3168$ e $k = 111\cdot 9 + 38 > 1000$, o que não é possível. Além disso, se x = 3, 5, 7, 9 o algarismo das unidades de $111x^2 - 76x + 13$ é 4, 8, 0, 0, respectivamente, de modo que x = 5, para o qual $1000A + B = 111\cdot 25 - 76\cdot 5 + 13 = 2408$, o que não é possível.

Portanto os únicos números n que satisfazem o enunciado são 111555 e 444888.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

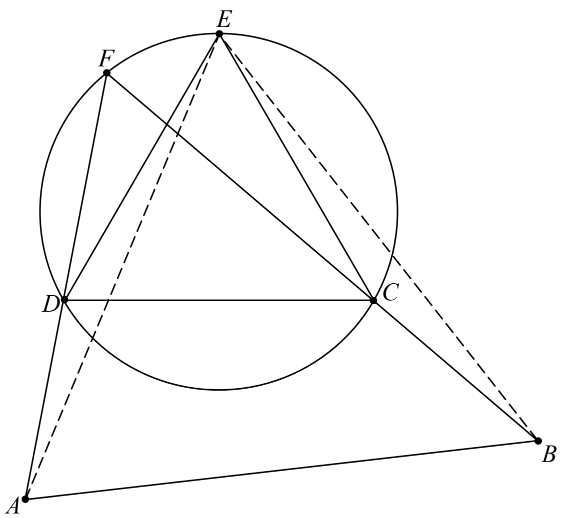
- Reduziu B aos casos $B = 3, 4, 5, 8$ ou 9: **[1 ponto]**
- Analisou corretamente os casos $B = 3$, 4 e 9, reduzindo novamente o problema aos casos $B = 5$ ou $B = 8$: **[2 pontos]**
- Reduziu o problema a estudar no máximo 20 casos: **[2 pontos]**
- Estudou metade dos (no máximo 20) casos que achou: **[2 pontos]**
- Concluiu: **[3 ponto]**

As pontuações a seguir não se acumulam com as demais mas podem se acumular entre si.

- Verificou que 111555 e 444888 são soluções: **[1 ponto por solução]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Uma solução:



Prolongue AD e BC até se encontrarem no ponto F. Veja que $\angle AFB = 60° = \angle DEC$. Com isso, o quadrilátero $FECD$ é inscritível. Temos:

(i) $\angle FDE = \angle FCE = \alpha \Rightarrow \angle ADE = \angle BCE = 180° - \alpha$.
(ii) $AD = BC$ e $ED = EC$.

De (i) e (ii), concluímos que $\Delta ADE \equiv \Delta BCE$. Portanto, $EA = EB$.

Além disso, $\angle DEA = \angle CEB$, de onde concluímos que $\angle AEB = \angle DEC = 60°$. Dessa forma, o triângulo ABE é eqüilátero de lado 8 e sua área é igual a $\dfrac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$ cm^2.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Mostrou que os ângulos $\angle ADE$ e $\angle BCE$ são iguais: **[4 pontos]**
- Concluiu que os triângulos ADE e BCE são congruentes: **[2 pontos]**
- Mostrou que o triângulo ABE é eqüilátero: **[3 pontos]**
- Calculou corretamente a área do triângulo: **[1 ponto]**

As pontuações a seguir não se acumulam com as demais nem entre si.

- Provou que o quadrilátero $CDFE$ é inscritível: **[2 pontos]**
- Observou que o triângulo ABE é eqüilátero mas não provou: **[1 ponto]**

Observação: o aluno não perde ponto se não colocar ou errar a unidade de área.

Outra solução:
Considere os pontos no plano complexo. Representaremos o número complexo correspondente ao ponto X com a letra correspondente minúscula x. Fixemos o ponto médio de AB como origem e sejam $a = -4$ e $b = 4$. Assim, sendo $\alpha = \angle BAD$ e $\beta = \angle ABC$, ambos no sentido anti-horário, podemos encontrar as coordenadas de C e D:

$$c - b = \frac{5}{8}(a-b)\operatorname{cis}(-\beta) \Leftrightarrow c = 4 - 5\operatorname{cis}(-\beta)$$

$$d - a = \frac{5}{8}(b-a)\operatorname{cis}\alpha \Leftrightarrow d = -4 + 5\operatorname{cis}\alpha$$

Sendo $\omega = \operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$ a raiz sexta da unidade e raiz da equação $x^2 - x + 1 = 0$,

$$e - d = (c-d)\omega \Leftrightarrow e = (1-\omega)d + c\omega = \omega c - \omega^2 d = 4\omega - 5\omega\operatorname{cis}(-\beta) + 4\omega^2 - 5\omega^2\operatorname{cis}\alpha$$

$$\Leftrightarrow e = 4(\omega + \omega - 1) - 5\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) + \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow e = 4\left(2\cdot\frac{1+i\sqrt{3}}{2} - 1\right) - 5\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow e = 4\sqrt{3}i - 5\left(\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha + \pi\right) + \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow e = 4\sqrt{3}i - 5\left(-\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)\right) = 4\sqrt{3}i$$

Assim, o triângulo ABE, com pontos de coordenadas $A = (-4, 0)$, $B = (4, 0)$ e $E = (0, 4\sqrt{3})$, é eqüilátero e tem área $\frac{8\cdot 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$ cm².

CRITÉRIO DE CORREÇÃO (VÁLIDO PARA SOLUÇÕES COM GEOMETRIA ANALÍTICA TAMBÉM):
- Encontrou as coordenadas de C e D: **[2 pontos cada]**
- Encontrou as coordenadas de E: **[4 pontos]**
- Concluiu: **[2 pontos]**

As pontuações a seguir não se acumulam com as demais nem entre si.
- Provou que o quadrilátero $CDFE$ é inscritível: **[2 pontos]**
- Observou que o triângulo ABE é eqüilátero mas não provou: **[1 ponto]**

Observação: o aluno não perde ponto se não colocar ou errar a unidade de área.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:
Escolha 20 das cidades do país. Ligando duas quaisquer delas por uma estrada, utilizaremos $\binom{20}{2} = \frac{20.19}{2} = 190$ estradas, e a cidade restante não poderá ser alcançada de automóvel. Logo se deve construir pelo menos 191 estradas. Vamos mostrar que com essa quantidade é possível atingir nosso objetivo.

Suponha que $n = 191$, mas que seja possível dividir as cidades do país em dois grupos A e B, digamos com a e b cidades, respectivamente, de tal sorte que nenhuma cidade de A possa ser alcançada de automóvel a partir de qualquer cidade de B. Então o número de estradas no país é no máximo $\binom{a}{2}+\binom{b}{2}$, de modo que $\binom{a}{2}+\binom{b}{2} \geq 191$, ou ainda, $(a^2 + b^2) - (a + b) \geq 2\cdot 191 = 382$.

Como $a + b = 21$, segue da inequação acima que $a^2 + b^2 \geq 282 + 21 = 403$. Logo

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}{2} \leq \frac{441-403}{2} = 19.$$

Mas, como $a + b = 21$ e a e b são naturais, temos $ab \geq 1\cdot 20 = 20$, uma contradição.

Logo, se $n = 191$, sempre é possível viajar entre quaisquer duas cidades.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Mostrou, por meio de um exemplo, que para $n = 190$ não é possível e concluiu que n deve ser pelo menos 191: **[2 pontos]**
- No caso $n = 191$, obteve, através de um argumento combinatório, uma desigualdade equivalente a $\binom{a}{2}+\binom{b}{2} \geq 191$: **[5 pontos]**
- Concluiu o raciocínio, mostrando (ainda nas notações acima) que $ab \leq 19$ e explicando em seguida que isso é uma contradição: **[3 pontos]**