XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 2 (7ª. ou 8ª. séries)

PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

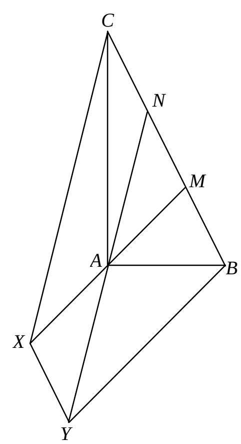
01. Esmeralda posicionou todos os números naturais de 1 a 2006 no seguinte arranjo em forma de pirâmide:

				21				
			20	13	22			
		19	12	7	14	23		
	18	11	6	3	8	15	24	
17	10	5	2	1	4	9	16	25

Em qual andar se encontrará o número 2006? (Por exemplo: o número 1 está no primeiro andar, o 6 no segundo andar e o 23 no terceiro).

02. A soma dos quadrados de três inteiros consecutivos é igual a 302. Qual é a soma desses números?

03. Seja ABC um triângulo retângulo em A. Considere M e N pontos sobre a hipotenusa BC tais que $CN = NM = MB$. Os pontos X e Y são tais que $XA = AM$ e $YA = AN$. Determine a área do quadrilátero $XYBC$, sabendo que o triângulo ABC tem área 12 cm^2.



04. Um tabuleiro de xadrez 8×8 será decomposto em retângulos que satisfazem simultaneamente as seguintes propriedades:
(i) cada retângulo possui um número inteiro de casas;
(ii) os diversos retângulos possuem números de casas distintos entre si;
(iii) cada retângulo possui a mesma quantidade de casas brancas e pretas.
Qual é o maior número de retângulos que pode ter a decomposição do tabuleiro?

05. A partir de uma terna ordenada (a, b, c), obtemos uma seqüência de ternas através de sucessivas transformações do tipo:
$(a, b, c) \to (a^2 \cdot b, a - b + c, b - c)$.
Por exemplo, a partir da terna (1, 2, 3), obtemos a seguinte seqüência:
$(1, 2, 3) \to (2, 2, -1) \to (8, -1, 3) \to (-64, 12, -4) \ldots$
Se começarmos com (1, 1, 1) como a primeira terna ordenada de uma seqüência, qual será a soma dos três termos da terna que ocupará a 2006ª posição nesta seqüência?

XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 2 (7ª. ou 8ª. séries)

PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

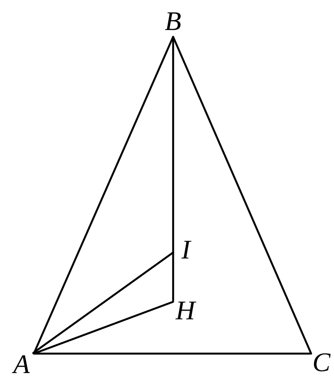
PROBLEMA 1

Na Rua do Gengibre, existem n casas numeradas de 1 a n ($n \in \mathbb{N}$). As casas de numeração par ficam todas de um mesmo lado da rua, com as casas de numeração ímpar do lado oposto. O prefeito Ludmilson Amottarim resolveu derrubar alguma(s) casa(s) a fim de que as somas dos números das casas fossem iguais dos dois lados da rua. Para atingir o seu objetivo, qual é o número mínimo de casas que o prefeito deve derrubar se:

a) a rua tem $n = 15$ casas?
b) a rua tem $n = 16$ casas?
c) a rua tem $n = 2006$ casas?

PROBLEMA 2

Na triângulo ABC isósceles abaixo, I é o encontro das bissetrizes e H é o encontro das alturas. Sabe-se que $\angle HAI = \angle HBC = \alpha$. Determine o ângulo α.



PROBLEMA 3

Sejam a e b números reais distintos tais que $a^2 = 6b + 5ab$ e $b^2 = 6a + 5ab$.

a) Determine o valor de $a + b$.
b) Determine o valor de ab.

PROBLEMA 4

Todos os inteiros de 1 a 2006 são escritos num quadro. Então, cada um destes números é substituído pela soma de seus algarismos. Estas substituições são realizadas repetidas vezes até que tenhamos 2006 números com 1 algarismo cada. Dos números que restaram no quadro, qual aparece mais vezes: o 1 ou o 2?