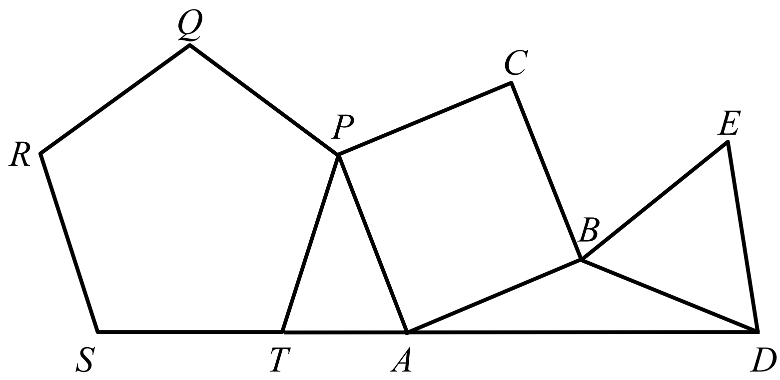
XXIX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 2 (7ª. ou 8ª. séries)

PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

01. Ludmilson descobriu que o produto da idade que tinha há 55 anos atrás pela idade que terá daqui a 55 anos é igual ao cubo de um número primo. Qual é a idade atual de Ludmilson?

02. Sendo $f(x) = 100x + 3$, calcule o valor de $\dfrac{f(10^{-8}) - f(10^{3})}{10^{-8} - 10^{3}} - f(-1)$.

03. Na figura abaixo temos um pentágono regular, um quadrado e um triângulo eqüilátero, todos com a mesma medida de lado.



Determine a medida, em graus, do ângulo $\angle QCE$.

04. Um inteiro positivo K tem n algarismos e é igual a $2608.n$. Determine a soma dos algarismos de K

05. Em 1949 o matemático indiano D. R. Kaprekar, inventou um processo conhecido como *Operação de Kaprekar*. Primeiramente escolha um número de quatro dígitos (não todos iguais), em seguida escreva a diferença entre o maior e o menor número que podem ser formados a partir de uma permutação dos dígitos do número inicial. Repetindo o processo com cada número assim obtido, obtemos uma seqüência. Por exemplo, se o primeiro número for 2007, o segundo será 7200 – 0027 = 7173. O terceiro será 7731 – 1377 = 6354.
Começando com o número 1998, qual será o 2007-ésimo termo da seqüência?

XXIX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 2 (7ª. ou 8ª. séries)

PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1
O triângulo ABC é retângulo em B. Sejam I o centro da circunferência inscrita em ABC e O o ponto médio do lado AC. Se $\angle AOI = 45°$, quanto mede, em graus, o ângulo $\angle ACB$?

PROBLEMA 2
Sejam α e β as raízes da equação quadrática $(x-2)(x-3)+(x-3)(x+1)+(x+1)(x-2)=0$.

Determine o valor de $\dfrac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}+\dfrac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)}+\dfrac{1}{(\alpha-3)(\beta-3)}$.

PROBLEMA 3
a) Determine a quantidade de divisores do número $N = 23^5 - 23$.
b) Mostre que para todo número natural n, $n^5 - n$ é múltiplo de 30.

PROBLEMA 4
Um quadrado 4×4 é dividido em 16 quadrados unitários. Cada um dos 25 vértices desses quadrados deve ser colorido de vermelho ou azul. Ache o número de colorações diferentes tais que cada quadrado unitário possua exatamente dois vértices vermelhos.