XXX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 2 (8º ou 9º anos)

PARTE A
(Cada problema vale 5 pontos)

01. Sejam x e y números reais positivos satisfazendo as equações $x^2 + y^2 = 1$ e $x^4 + y^4 = \frac{17}{18}$.

Calcule o valor de $\frac{1}{xy}$.

02. Um viajante, que se encontrava perdido na floresta, andou 1 metro para o Leste, 2 metros para o Norte, 3 para o Oeste, 4 para o Sul, 5 para o Leste, 6 para o Norte,..., 2006 metros para o Norte, 2007 para o Oeste e 2008 para o Sul. Calcule, em metros, o valor inteiro mais próximo da distância entre as posições inicial e final do viajante.

03. Os números a e b são as raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$. Calcule $13 \cdot \alpha^5 + 5 \cdot \beta^7$.

04. Em um triângulo ABC, seja D um ponto sobre o lado BC tal que $DB = 14$, $DA = 13$ e $DC = 4$. Sabendo que o círculo circunscrito ao triângulo ADB tem raio igual ao do círculo circunscrito ao triângulo ADC, calcule a área do triângulo ABC.

05. Dado um número natural N, multiplicamos todos os seus algarismos. Repetimos o processo com o número obtido até obtermos um número com um algarismo. Este número será chamado de *primitivo* de N. Por exemplo, como $3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$ e $4 \cdot 2 = 8$, concluímos que o primitivo de 327 é 8. Calcule a soma dos algarismos do maior número natural com todos os algarismos diferentes cujo primitivo é ímpar.

XXX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 2 (8º ou 9º anos)

PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

Encontre todos os triângulos retângulos, de lados com medidas inteiras, nos quais a área tem valor numérico igual ao do perímetro.

PROBLEMA 2

No quadro negro são escritos os números $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, 2008^2$. Pedro e Igor jogam um jogo onde eles apagam alternadamente um número por vez até sobrarem apenas dois números. Se a diferença entre estes dois números for múltiplo de 2009, Igor vence. Caso contrário, quem vence é Pedro. Sabendo que Pedro é o primeiro a jogar, diga quem possui a estratégia vencedora. Justifique sua resposta.

PROBLEMA 3

Seja ABC um triângulo acutângulo com $BC = 5$. Seja E o pé da altura relativa ao lado AC e F o ponto médio do lado AB. Se $BE = CF = 4$, calcule a área do triângulo ABC.

PROBLEMA 4

Um país tem 8 cidades, A_1, A_2, ..., A_6, B, C, ligadas por rodovias de mão dupla satisfazendo as seguintes condições: B e C são ambas ligadas às cidades A_1, A_2, ..., A_6, mas não são ligadas uma à outra; A_1, A_2, ..., A_6 são ligadas duas a duas. Calcule o número de maneiras distintas de viajar de carro de B a C, sem passar duas vezes por uma mesma cidade.