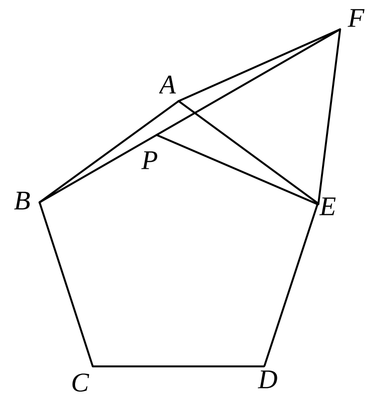
XXVII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

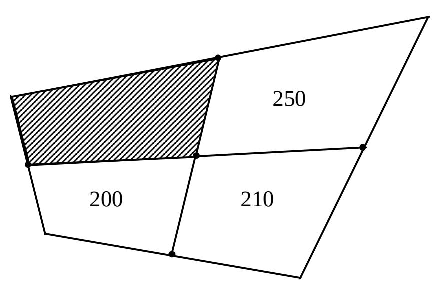
01. Na figura, $ABCDE$ é um pentágono regular e AEF é um triângulo eqüilátero. Seja P um ponto sobre o segmento BF, no interior de $ABCDE$, e tal que o ângulo $P\hat{E}A$ mede 12º, como mostra a figura abaixo.



Calcule a medida, em graus, do ângulo $P\hat{A}C$.

02. Seja a um número inteiro positivo tal que a é múltiplo de 5, $a + 1$ é múltiplo de 7, $a + 2$ é múltiplo de 9 e $a + 3$ é múltiplo de 11. Determine o menor valor que a pode assumir.

03. Um terreno quadrangular foi dividido em quatro lotes menores por duas cercas retas unindo os pontos médios dos lados do terreno. As áreas de três dos lotes estão indicadas em metros quadrados no mapa ao lado.



Qual é a área do quarto lote, representado pela região destacada no mapa?

04. A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfaz $f(x+f(y)) = x + f(f(y))$ para todos os números reais x e y. Sabendo que $f(2)=8$, calcule $f(2005)$.

05. Você tem que determinar o polinômio $p(x)$ de coeficientes inteiros positivos fazendo perguntas da forma "Qual é o valor numérico de $p(k)$?", sendo k um inteiro positivo à sua escolha.

Qual é o menor número de perguntas suficiente para garantir que se descubra o polinômio?

XXVII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

Determine todos os pares de inteiros $(x; y)$ tais que $9xy - x^2 - 8y^2 = 2005$.

PROBLEMA 2

Um prisma é reto e tem como base um triângulo equilátero. Um plano corta o prisma mas não corta nenhuma de suas bases, determinando uma secção triangular de lados a, b e c. Calcule o lado da base do prisma em função de a, b e c.

PROBLEMA 3

No campeonato tumboliano de futebol, cada vitória vale três pontos, cada empate vale um ponto e cada derrota vale zero ponto. Um *resultado* é uma vitória, empate ou derrota. Sabe-se que o Flameiras não sofreu nenhuma derrota e tem 20 pontos, mas não se sabe quantas partidas esse time jogou. Quantas seqüências ordenadas de resultados o Flameiras pode ter obtido? Representando vitória por V, empate por E e derrota por D, duas possibilidades, por exemplo, são $(V, E, E, V, E, V, V, V, E, E)$ e (E, V, V, V, V, V, E, V).

PROBLEMA 4

Determine o menor valor possível do maior termo de uma progressão aritmética com todos os seus sete termos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 primos positivos distintos.

Curiosidade: No ano passado, os ex-olímpicos Terence Tao (Austrália, ouro na IMO 1988) e Ben Green (Reino Unido, prata na IMO 1994) provaram que existem progressões aritméticas arbitrariamente grandes com todos os termos primos positivos. Tal questão remonta ao século XVIII, aparecendo nas pesquisas de Lagrange e Waring.