XXIX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

01. Quantos divisores positivos do número 123456 são menores que 2007?

02. Considere o conjunto A dos pares ordenados $(x;y)$ de reais não negativos tais que $x + y = 2$. Se a probabilidade de um elemento de A escolhido aleatoriamente estar a uma distância da origem menor ou igual a $5/3$ é p, quanto vale $2^5 3^5 p^2$?

03. Qual é a soma dos algarismos do inteiro mais próximo de $\sqrt{\underbrace{111...1}_{1000 \text{ uns}}}$?

04. O triângulo ABC é retângulo em B. Sejam I o centro da circunferência inscrita em ABC e O o ponto médio do lado AC. Se $\angle AOI = 45°$, quanto mede, em graus, o ângulo $\angle ACB$?

05. Um quadrado 4×4 é dividido em 16 quadrados unitários. Cada um dos 25 vértices desses quadrados deve ser colorido de vermelho ou azul. Ache o número de colorações diferentes tais que cada quadrado unitário possua exatamente dois vértices vermelhos.

XXIX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1
Ache todos os pares (x, y) de inteiros positivos tais que

$$2(x + y) + xy = x^2 + y^2.$$

PROBLEMA 2
Encontre todos os números n de seis algarismos da forma $AAABBB$, em que A e B são algarismos diferentes e não nulos e $n + 1$ é um quadrado perfeito.

PROBLEMA 3
No quadrilátero convexo $ABCD$, $\angle A + \angle B = 120°$, $AD = BC = 5$ e $AB = 8$. Externamente ao lado CD, construímos o triângulo eqüilátero CDE. Calcule a área do triângulo ABE.

PROBLEMA 4
Em um certo país há 21 cidades e o governo pretende construir n estradas (todas de mão dupla), sendo que cada estrada liga exatamente duas das cidades do país. Qual o menor valor de n para que, independente de como as estradas sejam construídas, seja possível viajar entre quaisquer duas cidades (passando, possivelmente, por cidades intermediárias)?