XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PARTE A
(Cada problema vale 4 pontos)

01. A equação do segundo grau $x^2 - 5x + m = 2011$ tem pelo menos uma solução inteira. Qual é o menor valor inteiro positivo possível de m?

02. Uma sequência de letras, com ou sem sentido, é dita *alternada* quando é formada alternadamente por consoantes e vogais. Por exemplo, EZEQAF, MATEMÁTICA, LEGAL e ANIMADA são palavras alternadas, mas DSOIUF, DINHEIRO e ORDINÁRIO não são. Quantos anagramas da palavra FELICIDADE (incluindo a palavra FELICIDADE) são sequências alternadas?

03. O ângulo interno do vértice A de um triângulo acutângulo ABC mede 75 graus. A altura relativa ao vértice A toca o lado BC no ponto D. As distâncias de D ao vértice B e ao ortocentro do triângulo são ambas iguais a 10 cm. Qual é a área do triângulo ABC, aproximada para o inteiro mais próximo? Se necessário, use $\sqrt{3} \cong 1{,}732$.

04. Qual é o maior valor possível do mdc de dois números distintos pertencentes ao conjunto $\{1,2,3,\ldots,2011\}$?

05. Seja f uma função dos reais não nulos nos reais não nulos tal que

- $(f(x)+f(y)+f(z))^2 = (f(x))^2 + (f(y))^2 + (f(z))^2$ para todos x, y, z reais não nulos tais que $x + y + z = 0$;
- $f(-x) = -f(x)$ para todo x real não nulo;
- $f(2011) = 1$.

Encontre o inteiro mais próximo de $f(33)$.

XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

No triângulo ABC, o ângulo $B\hat{A}C$ mede 45º. O círculo de diâmetro BC corta os lados AB e AC em D e E, respectivamente. Dado que $DE = 10$, encontre a distância do ponto médio M de BC à reta DE.

PROBLEMA 2

Encontre todas as soluções reais (x, y, z) do sistema

$$\left|\begin{array}{l} 2y = x + \dfrac{1}{x} \\ 2z = y + \dfrac{1}{y} \\ 2x = z + \dfrac{1}{z} \end{array}\right.$$

PROBLEMA 3

Seja $P(x)$ um polinômio de coeficientes inteiros. Sabe-se que $P(x) = 2011$ tem pelo menos duas raízes inteiras distintas iguais a 1 e t, e que $P(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz inteira. Determine todos os possíveis valores de t.

PROBLEMA 4

Esmeralda tem um círculo de cartolina dividido em n setores circulares, numerados de 1 a n, no sentido horário. De quantas maneiras Esmeralda pode pintar a cartolina, pintando cada setor com uma cor, tendo disponíveis k cores e de modo que quaisquer dois setores circulares vizinhos (isto é, que têm um segmento em comum como fronteira) tenham cores diferentes? Note que isso implica que os setores de números 1 e n devem ter cores diferentes.