XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
SEGUNDA FASE – NÍVEL UNIVERSITÁRIO
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:
A função derivável $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tem as seguintes propriedades:

a) $f(0)=0$ e $f(2)=2$.

b) Para todo $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P=(a,f(a))$ corta o eixo x em um ponto A e o eixo y em um ponto B de tal forma que A é o ponto médio do segmento BP.

Calcule $f(3)$.

PROBLEMA 2:
Prove que não existe um conjunto $A\subseteq\mathbb{R}^2$ tal que:

- Para todo $x\in\mathbb{R}$, $\{y\in\mathbb{R}\mid(x,y)\in A\}$ é finito.
- Para todo $y\in\mathbb{R}$, $\{x\in\mathbb{R}\mid(x,y)\notin A\}$ é enumerável.

Obs: Um conjunto A é dito *enumerável* se $A=\varnothing$ ou existe uma função sobrejetiva $f:\mathbb{N}\to A$.

PROBLEMA 3:
Seja A uma matriz real inversível de ordem n e A^t a sua transposta. Sejam $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\ldots\ge\lambda_n>0$ os autovalores de A^tA. Definimos a *norma* de A por $\|A\|=\sqrt{\lambda_1}$ e o *fator de dilatação* de A por $d(A)=\sqrt{\lambda_1/\lambda_2}$. Prove que, para quaisquer matrizes reais inversíveis A e B, $d(AB)\ge\dfrac{\|AB\|}{\|A\|\cdot\|B\|}\cdot d(B)$.

XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
SEGUNDA FASE – NÍVEL UNIVERSITÁRIO
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4:

Seja $\mathbb{Z}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n); x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{Z}\}$.

Seja p um primo, k um inteiro positivo e $P_1, P_2, ..., P_k,\ Q \in \mathbb{Z}^n$ tais que para todo j, $1 \le j \le k, \dfrac{P_j - Q}{p} \notin \mathbb{Z}^n$.

Prove que existe um polinômio $f(x_1, ..., x_n)$ com coeficientes inteiros com $f(P_j) = 0$ para todo j, $1 \le j \le k$, e $\dfrac{f(Q)}{p} \notin \mathbb{Z}$.

PROBLEMA 5:

Seja $m \ge 2$ um inteiro.

Arnaldo e Bernaldo disputam o seguinte jogo: cada jogador recebe, alternadamente, um número N_k e devolve para o outro jogador *ou* $N_{k+1} = N_k - 1$ *ou* $N_{k+1} = \left\lfloor N_k / m \right\rfloor$.

Arnaldo começa recebendo um número inteiro positivo N_0. Quem devolver zero vence o jogo.

Seja A_n (resp. B_n) o conjunto dos valores de $N_0, N_0 < n$, tais que Arnaldo (resp. Bernaldo) tem estratégia vencedora.

Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|A_n|}{|B_n|}$ em função de m.

PROBLEMA 6:

Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ uma função derivável, com derivada contínua, com $|\gamma'(t)| = 1$ para todo t e cuja imagem é uma curva simples fechada, isto é,

$$\gamma(t_0) = \gamma(t_1), t_0 < t_1 \Leftrightarrow t_0 = 0,\ \ t_1 = 2\pi .$$

Prove que existem $0 \le t_0 < t_1 < 2\pi$ tais que

$$|\gamma(t_0) - \gamma(t_1)| \le \frac{2}{\pi} \ \min\ \{t_1 - t_0, 2\pi + t_0 - t_1\} .$$