XXVII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
SEGUNDA FASE – NÍVEL UNIVERSITÁRIO
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:

Determine, em função de n, o número de possíveis valores para o determinante de A, dado que A é uma matriz real $n \times n$ tal que $A^3 - A^2 - 3A + 2I = 0$, onde I representa a matriz identidade $n \times n$, e 0 representa a matriz nula $n \times n$.

PROBLEMA 2:

Sejam f e g funções contínuas distintas de $[0, 1]$ em $(0, +\infty)$ tais que $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$.

Para $n \geq 0$, seja $y_n = \int_0^1 \frac{f(x)^{n+1}}{g(x)^n} dx$.

Prove que $(y_n)_{n \geq 0}$ é uma seqüência crescente e divergente.

PROBLEMA 3:

Sejam $v_1, v_2, ..., v_n$ vetores em $\mathbb{R}^2$ tais que $|v_i| \leq 1$ para $1 \leq i \leq n$ e $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$. Prove que existe uma permutação σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\left|\sum_{j=1}^{k} v_{\sigma(j)}\right| \leq \sqrt{5}$ para qualquer k com $1 \leq k \leq n$.

Obs. Se $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2, |v| = \sqrt{x^2 + y^2}$ denota a norma euclidiana de v.

XXVII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
SEGUNDA FASE – NÍVEL UNIVERSITÁRIO
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4:

Considere a seqüência $(a_n)_{n\geq 1}$ dada por $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^{2005}}, \forall n \geq 1.$

Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot a_n}$ converge.

PROBLEMA 5:

Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 x^{-x} dx.$

PROBLEMA 6:

Prove que para quaisquer naturais $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ e $0 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, a matriz $A = (a_{rs})_{1\leq r,s\leq k}$ dada por $a_{rs} = \binom{i_r + j_s}{i_r} = \frac{(i_r + j_s)!}{i_r!\, j_s!}$ $(1 \leq r, s \leq k)$ é invertível.