XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
SEGUNDA FASE – NÍVEL UNIVERSITÁRIO
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:
Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função integrável e crescente. Prove que

$$\int_0^1 xf(x)dx \geq \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$$

PROBLEMA 2:
Prove que, para todo inteiro $n \geq 2$, o número de matrizes quadradas 2×2 com entradas inteiras e pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ que têm determinante da forma $kn + 1$ para algum k inteiro é dado por $n^3 \cdot \prod_{\substack{p\ primo \\ p|n}} (1-\frac{1}{p^2})$.

PROBLEMA 3:
Uma mesa de bilhar tem o formato de elipse e não tem caçapas. Quando uma bola bate em um ponto P na borda da mesa, ela segue uma direção simétrica em relação à reta normal à elipse em P. Prove que se uma bola parte de um ponto A da elipse e, após bater na mesa nos pontos B e C, retorna a A, então ela baterá novamente em B.

XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
SEGUNDA FASE – NÍVEL UNIVERSITÁRIO
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4:
Seja p um polinômio irredutível em $\mathbb{Q}[x]$ de coeficientes racionais e grau maior do que 1. Prove que se p admite duas raízes r e s cujo produto é 1 então o grau de p é par.

PROBLEMA 5:

Seja $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ uma função crescente e bijetora. Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$ converge se, e somente se, a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge, sendo f^{-1} a função inversa de *f*.

PROBLEMA 6:
Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

Prove que, para $n > 1$, não existem inteiros $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n$ com $a_2, a_3, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_{n-1}$ não nulos tais que

$$A^{a_1}\cdot B^{b_1}\cdot A^{a_2}\cdot B^{b_2}\cdot\ldots\cdot A^{a_n}\cdot B^{b_n}=I,$$

onde I é a matriz identidade de ordem 2.