XXIX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
SEGUNDA FASE – NÍVEL UNIVERSITÁRIO
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:
Considere a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $ac < 0$. Prove que, para todo n inteiro positivo, a equação $\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ vezes}}(x))\ldots)) = 0$ tem pelo menos uma solução real.

PROBLEMA 2:
Dado um inteiro positivo n, mostre que existe um inteiro positivo N com a seguinte propriedade: se A é um subconjunto de $\{1,2,\ldots,N\}$ com pelo menos $N/2$ elementos, então existe um inteiro positivo $m \le N - n$ tal que

$$\left|A \cap \{m+1, m+2, \ldots, m+k\}\right| \ge \frac{k}{2}$$

para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.

PROBLEMA 3:
Considere o conjunto P_n dos polinômios mônicos de grau $n > 0$ e coeficientes complexos $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ satisfazendo $|a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_{n-1}|^2 = 1$.

Para $p(x) \in P_n$, seja $r(p(x))$ o máximo entre os módulos das raízes de $p(x)$ e $s(n) = \sup\limits_{p(x) \in P_n} r(p(x))$.

Determine $\lim\limits_{n \to \infty} s(n)$.

XXIX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
SEGUNDA FASE – NÍVEL UNIVERSITÁRIO
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4:

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ um função contínua tal que $f(f(x))=e^x$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Prove que, para todo n inteiro positivo,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^n}=+\infty .$$

PROBLEMA 5:

Seja A uma matriz real quadrada simétrica de ordem n, e $\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$ seus autovalores (contados com multiplicidade). Determine, em função de $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$:

a) O número de matrizes reais B simétricas de ordem n tais que $B^2=A$.

b) O número de matrizes reais B de ordem n tais que $B^2=A$.

PROBLEMA 6:

Para $a,b\in\mathbb{Q}$, definimos o conjunto

$$S(a,b)=\{ax^2+by^2 \mid x,y\in\mathbb{Q}\}$$

dos números racionais que podem ser escritos na forma ax^2+by^2 com $x,y\in\mathbb{Q}$. Dados a, b, c, d racionais ***não nulos***, mostre que $S(a,b)=S(c,d)$ se, e somente se, $\frac{ab}{cd}$ é o quadrado de um racional e existe um racional não nulo $q\in S(a,b)\cap S(c,d)$,