36ª Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **5 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 30. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Resposta	12	36	6	1	56	4

01. [Resposta: 12]

O ângulo externo a um vértice de um pentágono regular é 72° enquanto que o ângulo interno de de um triângulo equilátero é 60°. Assim, pelo teorema do ângulo externo aplicado ao triângulo *EAG* com respeito ao ângulo externo do vértice A, temos:
$x = \angle FAE - EGA = 72^\circ - 60^\circ = 12^\circ$

02. [Resposta: 36]

Seja *x* a quantidade de alunos da sala. Alguns alunos podem ter mudado o voto de "a favor" para "contra" e vice-versa. A diferença entre as quantidades de alunos nas duas circunstâncias que votaram contra representa o saldo entre esses dois tipos de trocas. Como apenas oito alunos mudaram de ideia, tal saldo não pode ser maior que 8, ou seja,

$$\frac{2x}{9} = \frac{5x}{9} - \frac{x}{3} \leq 8$$

Portanto, $x \leq 36$.

03. [Resposta: 6]

Sejam *x*, *y* e *z* as quantidades de inteiros dentre os 5 que deixam restos 0, 1 e 2 na divisão por 3, respectivamente. Como a soma dos 5 é igual a 1, $0 \cdot x + 1 \cdot y + 2 \cdot z = y + 2z$ deixa resto 1 na divisão por 3. Naturalmente, *x*, *y* e *z* são elementos do conjunto $\{0,1,2,3,4,5\}$. A última equação determina uma relação entre os possíveis valores de *y* e *z:*

i) se $y = 0$, $z = 2$ ou $z = 5$;
ii) se $y = 1$, $z = 0$ ou $z = 3$;
iii) se $y = 2$, $z = 1$;
iv) se $y = 3$, $z = 2$;
v) se $y = 4$, $z = 0$;
vi) se $y = 5$, não existe valor possível para *z*

Em um subconjunto de dois elementos com soma divisível por 3, ou ambos os inteiros são divisíveis por 3 ou um deles deixa resto 1 e o outro resto 2. Portanto a expressão que conta o número de somas divisíveis por 3 é:

$$\binom{x}{2} + y \cdot z$$

Lembrando que $x = 5 - y - z$ e estudando cada uma das cinco possibilidades para (x, y, z) resultantes da análise acima - como indicado na tabela abaixo -, podemos concluir que a quantidade máxima é 6 que ocorre quando $(x, y, z) = (0,3,2)$.

x	y	z	Total de Somas
3	0	2	3
0	0	5	0
2	2	1	3
0	3	2	6
1	4	0	0

04. [Resposta: 1]

Fatorando a expressão dada, temos $(x - y)(x + y) = 36$. Como a soma de $x + y$ e $x - y$ é par, ou ambos são pares ou ambos são ímpares. Como 36 é par, ambos são pares e podemos escrever:

$$\frac{x-y}{2} \cdot \frac{x+y}{2} = 9$$

Como $(x + y)/2 > 0$ e 9 possui apenas $\{1,3,9\}$ como divisores positivos, sabendo que $(x + y)/2 > (x - y)/2 > 0$ concluímos que:

$$(x-y)/2 = 1 \text{ e } (x+y)/2 = 9$$

Resolvendo o sistema resultante, temos $(x, y) = (10,8)$.

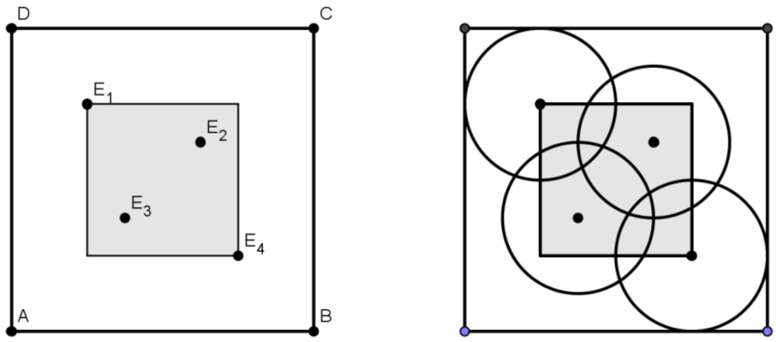
05. [Resposta: 56]

Um jogador deve obter pelo menos 4 vitórias pois caso contrário sua pontuação será no máximo:
$3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 13.$

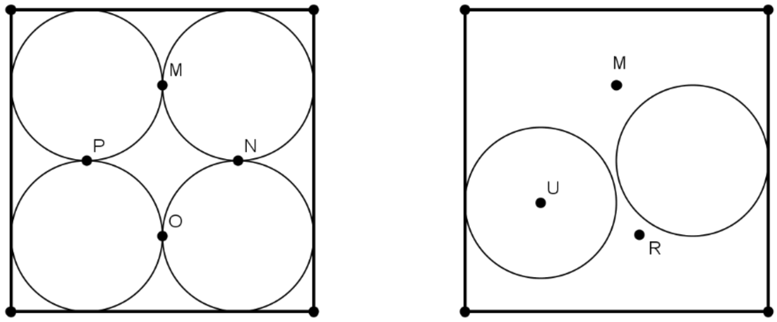
Com 4 vitórias, o jogador deve obter exatamente 3 empates. Em tal circunstância existem $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ maneiras de arranjar esses resultados dentre os sete jogos pois basta escolher as partidas que serão empates. Com 5 vitórias, ele deve perder os outros dois jogos. Em tal circunstância existem $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$ maneiras de arranjar esses resultados dentre os sete jogos pois basta escolher quais partidas serão derrotas. Logo, o total é $35 + 21 = 56$.

06. [Resposta: 4]

Para um círculo de raio 1 estar totalmente contido no quadrado *ABCD*, seu centro deve estar no quadrado sombreado na figura da esquerda que possui lado 2 e cujos lados distam 1 dos lados do quadrado original. Considere o conjunto *S* formado pelos pontos E_1, E_2, E_3 e E_4 situados nas coordenadas $(1;\, 3)$, $(1{,}5;\ 1{,}5)$, $(2{,}5;\, 2{,}5)$ e $(3{,}1)$ (Supondo o vértice *A* na coordenada $(0{,}0)$).



Os círculos de raio 1 centrados nesses pontos cobrem por completo o quadrado sombreado e isso mostra que qualquer ponto dentro de tal quadrado dista não mais que 1 dos pontos mencionados anteriormente. Mostremos agora que tal valor é mínimo. Suponha, por absurdo, que é possível S possuir apenas 3 pontos. Considere a figura abaixo:



Como cada um dos quatro círculos de raio 1 assinalados deve possuir pelo menos um ponto de S, pelo menos um ponto do conjunto $\{M, N, P, O\}$ deve ser escolhido para ser um elemento de tal conjunto. Suponhamos que seja M um dos pontos escolhidos. O círculo inferior direito deve possuir algum ponto R de S. Se tal ponto não coincide com N, é possível encontrarmos dois círculos disjuntos de raios unitários que não contém os pontos M e R apenas transladando os círculos superior direito e inferior esquerdo da primeira figura. Assim, o conjunto S deveria possuir mais dois outros pontos em cada um deles. Isso produziria um absurdo. Analogamente, podemos mostrar que P deve ser escolhido. Se M, N e P estão em S, o círculo de centro O e raio 1 não possui pontos de tal conjunto. Isso gera também um absurdo.

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte B

PROBLEMA 1:

a) A cada 6 paradas consecutivas, sabemos que ele come exatamente um chocolate do tipo 1. Assim, após 2016 paradas, ele terá comido $2016/6 = 336$ chocolates. Analogamente, ele terá comido $2016/4 = 504$ chocolates do tipo 2.

b) Repetindo o procedimento do item a) para os outros tipos de chocolates e sabendo que ele consumiu exatamente 2016 chocolates nas 2016 primeiras paradas, podemos concluir que:

$$\frac{2016}{a}+\frac{2016}{b}+\frac{2016}{c}+\frac{2016}{4}+\frac{2016}{6}=2016$$

Assim

$$1176=\frac{2016}{a}+\frac{2016}{b}+\frac{2016}{c}=\frac{2016\cdot(ab+ac+bc)}{abc}=\frac{2016\cdot(ab+ac+bc)}{144},$$

Ou seja,

$$ab+ac+bc=\frac{1176\cdot 144}{2016}=84$$

Observação: Para cada um dos tipos de chocolates, as paradas realizadas por Cantor correspondem aos termos de uma progressão aritmética. Um exemplo possível de cinco progressões para a viagem de Cantor seria considerar os inteiros das formas: $4k+1$, $4k+3$, $6k$, $6k+2$ e $6k+4$. Nesse caso, $ab+bc+ca=4.6+6.6+6.4 = 84$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Item a: **[+ 4 pontos]**
- Erros na conta da conclusão de pelo menos um dos dois valores: **[–2 pontos]**

- Item b: **[+ 6 pontos]**
- Erros na conta da conclusão do item b: **[–1 ponto]**

Pontuações não acumulativas: (as pontuações abaixo não podem ser somadas com as pontuações dos itens anteriores e nem entre si)

- Para o item b, obter o valor 84 em algum caso particular de cinco progressões aritméticas que se adequam ao enunciado como realizado na observação no final da solução. **[+3 pontos]**

- Para o item b, fazer qualquer uma das seguintes três afirmações: a quantidade dos chocolates comidos do tipo 3 é $2016/a$, a do tipo 4 é $2016/b$ e, finalmente, a do tipo 5 é $2016/c$. **[+3 pontos]**

PROBLEMA 2:

Primeira Solução:

Se $S(XYZ)$ denota a área do triângulo XYZ, a razão EG/GD pode ser calculada através das razões de áreas:

$$\frac{EG}{GD} = \frac{\mathrm{S(EGB)}}{\mathrm{S(GDB)}} = \frac{\mathrm{S(EFG)}}{\mathrm{S(FDG)}} = \frac{S(EGB) + S(EFG)}{S(GDB) + S(FDG)} = \frac{S(EFB)}{S(FDB)}$$

Além disso, temos:

$$\frac{S(EFB)}{S(ABC)} = \frac{S(EFB)}{S(CFB)} \cdot \frac{S(CFB)}{S(ABC)} = \frac{EB}{BC} \cdot \frac{CF}{CA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

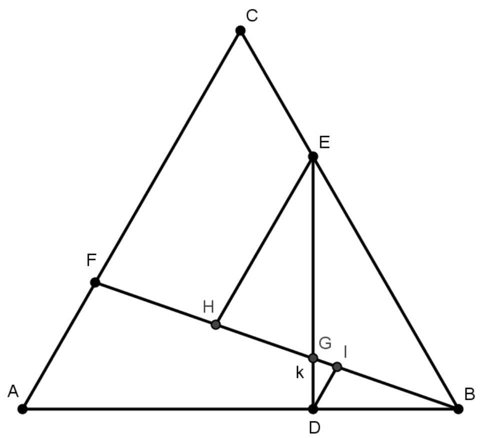
Analogamente,

$$\frac{S(FDB)}{S(ABC)} = \frac{1}{9}$$

Portanto

$$\frac{EG}{GD} = \frac{S(EFB)}{S(ABC)} \cdot \frac{S(ABC)}{S(FDB)} = \frac{4}{9} \cdot 9 = 4$$

Segunda Solução:



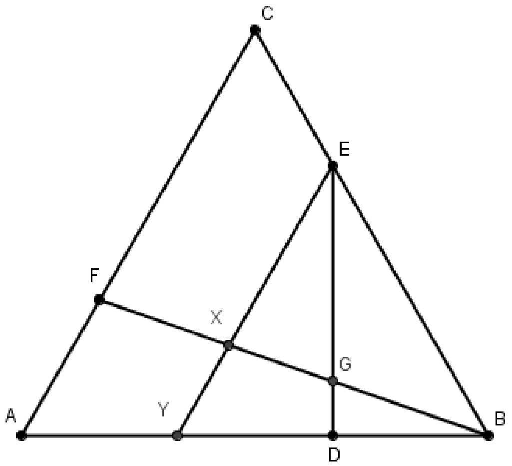
Pelos pontos E e D, respectivamente, trace paralelas ao lado AC determinando os pontos H e I sobre o segmento FB. Seja $AB = 3x$. Temos $\Delta\, EHB \sim \Delta\, CFB$ e $\Delta IDB \sim \Delta FAB$, daí:

$$\frac{HE}{2x} = \frac{HE}{FC} = \frac{EB}{BC} = \frac{2x}{3x} \text{ e } \frac{ID}{x} = \frac{ID}{FA} = \frac{DB}{AB} = \frac{x}{3x}.$$

Portanto, $HE = 4x/3$ e $ID = x/3$. Como, $\Delta GID \sim \Delta HGE$, segue que:

$$\frac{EG}{GD} = \frac{HE}{ID} = \frac{\frac{4x}{3}}{\frac{x}{3}} = 4$$

Terceira Solução:
Trace a paralela a AC por E encontrando FB no ponto X e AB em Y.



Como EY e AC são paralelas, temos $\frac{AY}{AB} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow AY = CE = \frac{AB}{3}$. Desse modo,
$AY = YD = DB = \dfrac{AB}{3}$
Sabe-se também que:
$\Delta ABC \sim \Delta YBE \Rightarrow \dfrac{XY}{XE} = \dfrac{FA}{FC} = \dfrac{1}{2}$

Agora podemos usar o teorema de Menelaus no triângulo ΔDEY e reta $\overleftrightarrow{BGX}$:

$$\frac{EG}{GD} \cdot \frac{DB}{BY} \cdot \frac{YX}{XE} = 1 \Rightarrow \frac{EG}{GD} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{EG}{GD} = 4$$

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

Primeira Solução:

• Afirmar qualquer uma das seguintes três igualdades: $\frac{EG}{GD} = \frac{S(EGB)}{S(GDB)}, \frac{EG}{GD} = \frac{S(EFG)}{S(FGD)}, \frac{EG}{GD} = \frac{S(EFB)}{S(FDB)}$: **[+3 pontos]**

• Calcular $S(EFB)/S(ABC)$ **[+3 pontos]**
• Calcular $S(FDB)/S(ABC)$ **[+3 pontos]**
• Concluir o problema: **[+1 ponto]**

Segunda Solução:

• Obter que $HE = 4x/3$: **[+3 pontos]**
• Obter que $ID = x/3$: **[+3 pontos]**
• Afirmar que $\Delta GID \sim \Delta HGE$: **[+3 pontos]**
• Concluir o problema: **[+1 ponto]**

Terceira Solução:

• Obter que $AY = AB/3$: **[+3 pontos]**

- Obter que $XY/XE = 1/2$ ou que $XY/YE = 1/3$: **[+3 pontos]**
- Concluir o problema usando o Teorema de Menelaus: **[+4 pontos]**

PROBLEMA 3:

a) A equação $(x^2)^2 - (x^2) + 1 = x^2$ pode ser reescrita como:

$$(x^2-1)^2 = (x^2)^2 - (x^2) + 1 - x^2 = 0.$$

Como $(x^2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$, segue que $x = \pm 1$. Portanto, neste caso, o número de soluções reais distintas é 2.

b) Seja $p(x) = y$. Queremos determinar as raízes de $p(y) = y$, ou seja,

$$y^2 - y + 1 = y \Leftrightarrow (y-1)^2 = 0.$$

Devemos ter $y = 1$ e consequentemente $x^2 - x + 1 = 1$. As raízes desta equação do segundo grau são 0 e 1. Portanto, temos também neste caso duas soluções reais distintas.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Item a: **[+ 2 pontos]**
- Esquecer de mencionar uma das duas raízes ao resolver a equação $x^2 = 1$: **[–1 ponto]**

- Efetuar a mudança de variável $p(x) = y$ **[+ 3 pontos]**
- Encontrar as soluções da equação $p(y) = y$: **[+ 3 pontos]**
- Encontrar as soluções da equação $x^2 - x + 1 = 1$ **[+ 2 pontos]**

Pontuações não acumulativas: (as pontuações abaixo não podem ser somadas com as pontuações de cima e nem entre si)

- Afirmar sem justificativa que 0 é raiz do item b: **[+1 ponto]**
- Afirmar sem justificativa que 1 é raiz do item b: **[+1 ponto]**
- Afirmar sem justificativa que 0 e 1 são raízes do item b: **[+2 pontos]**