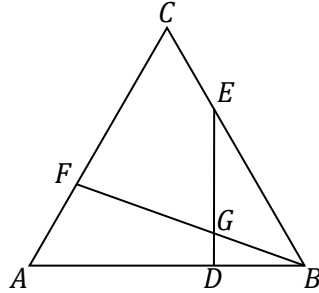


36ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PARTE A
(Cada problema vale 5 pontos)

01. No desenho abaixo, o triângulo ABC é equilátero e $BD = CE = AF = AB/3$. A razão EG/GD pode ser escrita na forma m/n , $\text{mdc}(m, n) = 1$. Quanto vale $m + n$?



02. O *imparial* de n é igual ao produto de todos os naturais ímpares menores ou iguais a n . Quais são os três últimos algarismos do imparial de 2014?

03. A sequência a_1, a_2, a_3, \dots satisfaz $a_1 = 1$ e $a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + n}$. Qual é o inteiro mais próximo de a_{2014} ?

04. A *mediana* de um conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ com $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ é igual à media dos dois termos centrais $\frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ se n é par e ao termo central $a_{\frac{n+1}{2}}$ se n é ímpar. Sendo M a quantidade de subconjuntos de $\{1, 2, 3, \dots, 2014\}$ com mediana igual a 2012, encontre o resto da divisão de M por 2014.

05. Uma caixa de madeira em forma de paralelepípedo retângulo possui dimensões $3 \times 4 \times 6$. Ela está sobre o chão com uma de suas faces completamente apoiada sobre o chão. Uma fonte de luz emite raios paralelos de luz formando 45° com o chão. Considerando apenas essa fonte de luz, qual a área da maior sombra possível da caixa no chão? Não inclua a base da caixa na sombra.

06. Um conjunto é dito *completamente divisível* se para quaisquer elementos $a < b$ temos que a divide b . Um conjunto de inteiros positivos A é completamente divisível e possui 2016 como um de seus elementos. Sabendo que todos os elementos de A são menores que 2 milhões, qual o máximo número de elementos que A pode ter?

36ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

Numa sala de aula, o professor fez uma votação para ver se adia ou não a data da prova de Matemática. Um terço dos alunos foi contra o adiamento e o restante a favor. Vários alunos argumentaram e o professor fez nova votação, na qual 8 alunos mudaram de opinião, de modo que $\frac{5}{9}$ dos alunos passaram a ser contra o adiamento da prova. No máximo, quantos alunos participaram da votação?

PROBLEMA 2

Seja $ABCD$ um quadrado de lado 4. O conjunto S de pontos no interior de $ABCD$ tem a seguinte propriedade: todo círculo de raio 1 contido totalmente em $ABCD$ contém, em sua borda ou em seu interior, pelo menos um ponto de S . Qual é a quantidade mínima de pontos em S ?

PROBLEMA 3

Um círculo tangencia os lados do quadrilátero $ABCD$. Os pontos de tangência são R sobre AB , S sobre BC , T sobre CD e U sobre DA . Sabe-se que $AU = 1$, $DU = 2$, $BS = 2$ e $CS = 4$. Calcule o comprimento SU .