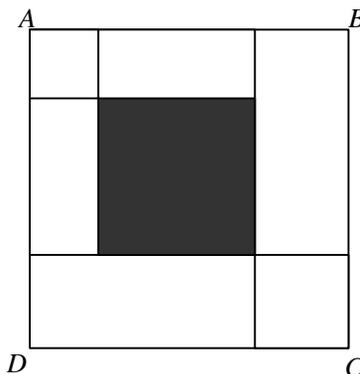


XXX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 1 (6º. e 7º. Anos)

PROBLEMA 1

Um quadrado de lado 12 foi dividido em sete regiões retangulares que não se sobrepõem, conforme a figura. Uma delas é um quadrado de vértice C , cuja área é metade da área de cada um dos dois retângulos vizinhos; outra é um quadrado de vértice A , cuja área é metade da área de cada um dos dois retângulos vizinhos.



- a) Mostre que o quadrilátero destacado é um quadrado.
- b) Calcule a área do quadrado destacado.

PROBLEMA 2

Esmeralda escolhe um número inteiro positivo qualquer e realiza a seguinte operação com ele: cada um de seus algarismos é trocado pelo seu sucessor, com exceção do 9, que é trocado por 0. Em seguida, os eventuais zeros que aparecem à esquerda são eliminados. Por exemplo, ao se realizar a operação no número 990003953 obtém-se 1114064 (note que os dois zeros à esquerda gerados pelos dois primeiros algarismos 9 foram eliminados).

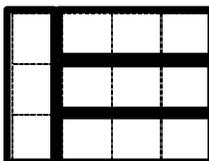
A operação é repetida até que se obtenha 0. Por exemplo, começando com 889, obtemos a seqüência de números

$$889, 990, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0$$

- a) Apresente a seqüência de números quando o primeiro número é 2008.
- b) Mostre que, independente do número inicial, após uma quantidade finita de operações Esmeralda obtém 0.

PROBLEMA 3

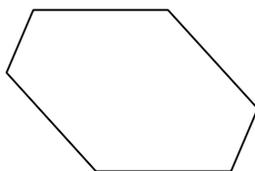
Jade tem n peças iguais 3×1 e quer utilizá-las para cobrir um tabuleiro $3 \times n$, sendo n um inteiro positivo. Por exemplo, para $n = 4$ ela pode cobrir o tabuleiro da seguinte maneira:



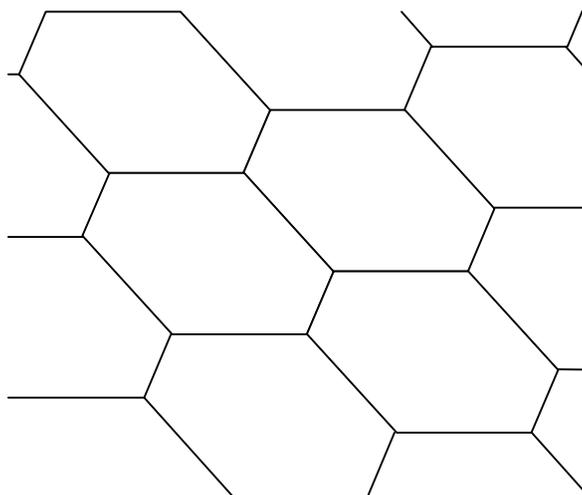
- a) Determine de quantas maneiras Jade pode fazer a cobertura para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
- b) De quantas maneiras Jade pode cobrir o tabuleiro para $n = 15$?

PROBLEMA 4

Considere o seguinte hexágono:



Com cópias desse polígono podemos cobrir todo o plano, sem sobreposições, como mostra a figura a seguir.



a) É possível cobrir o plano com cópias de um pentágono regular?

Observação: um polígono é regular quando todos os seus lados são de mesma medida e todos os seus ângulos internos são iguais.

b) Seja $ABCDE$ um pentágono com todos os lados iguais e tal que a medida do ângulo interno nos vértices A e B são $m(\hat{A}) = 100^\circ$ e $m(\hat{B}) = 80^\circ$. Mostre como é possível cobrir todo o plano com cópias desse pentágono, sem sobreposições.

PROBLEMA 5

Vamos chamar de *garboso* o número que possui um múltiplo cujas quatro primeiras casas de sua representação decimal são 2008. Por exemplo, 7 é garboso pois 200858 é múltiplo de 7 e começa com 2008. Observe que $200858 = 28694 \times 7$.

a) Mostre que 17 é garboso.

b) Mostre que todos os inteiros positivos são garbosos.