XXX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (8º. e 9º. Anos)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1
Em cada casa de um tabuleiro $n \times n$, colocamos um dos números 1,2,3,4, de modo que cada casa tem exatamente uma casa vizinha com o mesmo número. É possível fazer isso quando

(a) $n = 2007$?

(b) $n = 2008$?

Observação. Duas casas são vizinhas se possuem um lado em comum.

PROBLEMA 2
Seja P um pentágono convexo com todos os lados iguais. Prove que se dois dos ângulos de P somam 180 graus, então é possível cobrir o plano com P, sem sobreposições.

PROBLEMA 3
Prove que existem infinitos inteiros positivos n tais que

$$\frac{5^{n-2}-1}{n}$$

é um inteiro.

XXX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (8º. e 9º. Anos)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Mostre que se p,q são inteiros positivos primos tais que $r = \dfrac{p^2 + q^2}{p + q}$ é inteiro, então r é primo.

PROBLEMA 5

Seja ABC um triângulo acutângulo e O, H seu circuncentro, ortocentro, respectivamente. Sabendo que

$$\frac{AB}{\sqrt{2}} = BH = OB,$$

calcule os ângulos do triângulo ABC.

PROBLEMA 6

Sendo A um conjunto de números inteiros, definimos $S(A)$ como o conjunto formado pelas somas de dois elementos, não necessariamente distintos e $D(A)$ como o conjunto formado pelas diferenças de dois elementos, não necessariamente distintos. Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3, 10\}$ então $S(A) = \{2, 3, 4, 5, 6, 11, 12, 13, 20\}$ e $D(A) = \{-9, -8, -7, -2, -1, 0, 1, 2, 7, 8, 9\}$.

Mostre que existe um conjunto finito A tal que $S(A)$ tem no máximo 10^{97} elementos e $D(A)$ tem no mínimo 10^{100} elementos.